



Sandra Inês da Cunha Monteiro

Mestre em Estatística e Optimização

Modelos com cruzamento de aninhamentos em escada estruturados

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Estatística e Gestão do Risco

Orientador:

Professor Doutor Miguel Fonseca
Investigador do Centro de Matemática e Aplicações
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Co-orientador:

Professor Doutor Francisco Carvalho
Professor Adjunto
Escola Superior de Gestão de Tomar
Instituto Politécnico de Tomar



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Agosto de 2015

Este texto não foi escrito ao abrigo do Novo Acordo Ortográfico.

Modelos com cruzamento de aninhamentos em escada estruturados

Copyright © Sandra Inês da Cunha Monteiro, Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

O primeiro agradecimento não pode deixar de ser para o Professor Mexia, pela disponibilidade, pelo apoio e ideias. Obrigado Professor, foi uma honra trabalhar consigo.

Agradeço ao meu orientador, Miguel Fonseca, por ter estado presente sempre que precisei e por toda a orientação prestada ao longo deste caminho. Obrigada pelas respostas às perguntas quase sem fim e pela amizade. Um agradecimento também ao meu co-orientador, Francisco Carvalho, por todas as sugestões, disponibilidade e apoio. Acima de tudo, agradeço aos dois por estarem presentes quando mais precisei...não vou esquecer.

À Professora Teresa Oliveira e Célia Fernandes, por todas as sugestões que ajudaram a melhorar a versão final.

Aos meus amigos que sempre me incentivaram a seguir em frente. Aos meus colegas da ESCE, que ajudaram o meu tempo a “esticar”, agradeço todo o apoio e incentivo.

À Dina, amiga que está no meu coração. O doutoramento fez com que as nossas vidas se cruzassem...mas acho que estava destinado! Obrigada, por estares presente nos momentos muito bons, mas especialmente, naqueles que foram mais difíceis. Este caminho dificilmente chegaria ao fim sem o teu apoio.

À minha família (em especial ao Carlos), por acreditarem em mim, sempre!! Por me terem substituído em todos os momentos, e não foram poucos, em que não

consegui estar presente. Foi o vosso apoio e carinho que me ajudou a chegar aqui. O que eu sou hoje devo-o a todos vocês. Obrigada!

Este trabalho de Investigação foi feito ao abrigo do Programa de Apoio à Formação Avançada de Docentes do Ensino Superior Politécnico (PROTEC) do Instituto Politécnico de Setúbal.

A elaboração desta tese beneficiou do regime de isenção de propinas de doutoramento, no âmbito do Protocolo de Cooperação existente entre a faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e o Instituto Politécnico de Setúbal.

Resumo

Neste trabalho propomos um novo tipo de modelo, que designamos por modelo com aninhamento em escada estruturado. Este modelo tem por base o modelo com aninhamento em escada e, tal como este, apresenta vantagens face ao aninhamento equilibrado. Permite grande economia no número de observações utilizadas e uma distribuição mais uniforme da informação pelos vários factores. Com este novo tipo de modelo podemos construir novos modelos, também em escada, mais complexos do que os existentes até agora.

No aninhamento em escada a cada degrau do modelo corresponde um factor. Generalizamos a teoria destes modelos introduzindo a possibilidade de se desagregar cada um dos factores intervenientes, passando os degraus a terem submodelos com estrutura ortogonal.

Para estudar o aninhamento em escada estruturado, propomos duas estruturas algébricas que, apesar de diferentes, possibilitam obter os mesmos estimadores dos parâmetros relevantes. Álgebras de Jordan comutativas são utilizadas para exprimir essas estruturas. Usando as matrizes da base principal, das álgebras a que se associam os modelos, a estimação vai ter por base a relação entre as componentes de variância canónicas e as usuais. Para além do aninhamento em escada estruturado, apresentamos também modelos obtidos cruzando vários desses aninhamentos.

Palavras chave: aninhamento em escada e em escada estruturado, componentes de variância, álgebras de Jordan comutativas.

Abstract

In this paper we propose a new type of model, that we call structured stair nesting model. This model is based on the stair nesting model and, like this one, has advantages over the balanced nesting. It allows great economy in the number of observations used and distributes the amount of information more evenly across the different factors. With this new type of model we can construct new models, also in stair, more complex than the ones existing so far.

In stair nesting each step corresponds to a factor. We generalize the theory of these models by introducing the ability to break down each factor, putting on each step submodels with orthogonal structure.

To study structured stair nesting models, we propose two algebraic structures which, although different, allow to obtain the same estimators for the relevant parameters. Commutative Jordan algebras are used to express these structures. Using the principal basis, of the algebra associated to the models, the estimation will be based on the relationship between the canonical variance components and the usual ones. Apart from structured stair nesting models, we also present models obtained by crossing several of these nestings.

Keywords: stair nesting and structured stair nesting, variance components, commutative Jordan algebras.

Notação

\mathbf{y}_n : vector coluna com n componentes

$\mathbf{1}_n$: vector constituído por n componentes iguais a 1

$\mathbf{0}_n$: vector constituído por n componentes iguais a 0

$\dim(\mathcal{S})$: dimensão do subespaço \mathcal{S}

\mathcal{S}^\perp : complemento ortogonal do subespaço \mathcal{S}

$\mathbf{x}_\mathcal{S}$: projecção ortogonal do vector \mathbf{x} no subespaço \mathcal{S}

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$: produto interno entre os vectores \mathbf{x} e \mathbf{y}

$\|\mathbf{x}\|$: norma do vector \mathbf{x}

$\mathbf{A}_{n \times m}$: matriz com n linhas e m colunas ou do tipo $n \times m$

\mathbf{A}^t : transposta da matriz \mathbf{A}

\mathbf{A}^{-1} : inversa da matriz \mathbf{A}

\mathbf{A}^+ : inversa de Moore-Penrose da matriz \mathbf{A}

$D(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$: matriz diagonal por blocos

$[\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]^t$: matriz cujas linhas são constituídas pelos vectors $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$

$[\mathbf{A}_1^t \cdots \mathbf{A}_n^t]^t$: matriz cujas linhas são constituídas pelas submatrizes $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n$

\mathbf{J}_n : matriz de ordem n com todas as componentes iguais a 1

\mathbf{I}_n : matriz identidade de ordem n

$\mathbf{0}_{n \times m}$: matrix nula do tipo $n \times m$

$|\mathbf{A}|$: determinante da matriz \mathbf{A}

$\text{car}(\mathbf{A})$: característica da matriz \mathbf{A}

$\text{tr}(\mathbf{A})$: traço da matriz \mathbf{A}

$R(\mathbf{A})$: espaço gerado pela matriz \mathbf{A}

$E[\mathbf{y}]$: valor esperado do vector aleatório \mathbf{y}

$\text{COV}[\mathbf{y}]$: matriz de covariância do vector aleatório \mathbf{y}

$\text{COV}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$: matriz de covariância cruzada dos vectores aleatórios \mathbf{x} e \mathbf{y}

$\mathbf{y} \sim (\boldsymbol{\mu}; \mathbf{V})$: vector aleatório \mathbf{y} com vector médio $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância \mathbf{V}

$N(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{V})$: distribuição normal com vector médio $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância \mathbf{V}

χ_n^2 : distribuição qui-quadrado central com n graus de liberdade

$x_{p,n}$: quantil de probabilidade p para χ_n^2

$\mathcal{F}_{n,m}$: distribuição \mathcal{F} de Snedecor central com n e m graus de liberdade

$f_{p,n,m}$: quantil de probabilidade p de $\mathcal{F}_{n,m}$

\otimes : produto de Kronecker

\star : produto de Kronecker restrito

\times : produto cartesiano

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Resultados Preliminares	7
2.1	Bases Ortonormadas e Projecções Ortogonais	7
2.2	Matriz de Projecção Ortogonal e Matriz Simétrica	11
2.3	Matriz Inversa de Moore-Penrose	15
2.4	Produto de Kronecker entre Matrizes	16
2.5	Álgebras de Jordan Comutativas	19
2.5.1	Definição e Conceitos Fundamentais	19
2.5.2	Operações Binárias sobre Álgebras de Jordan Comutativas . .	27
2.6	Estatísticas Suficientes e Completas e Estimadores UMVUE	32
3	Aninhamento em Escada	37
3.1	Introdução	37
3.2	Modelo global	42
3.2.1	Estrutura Algébrica	42
3.2.2	Estimação	50
3.2.3	Normalidade	53
3.3	Modelo degrau a degrau	58
3.3.1	Estrutura Algébrica	58

3.3.2	Estimação	62
4	Aninhamento em Escada Estruturado	63
4.1	Introdução	63
4.2	Modelo Degrau a Degrau	66
4.2.1	Estrutura Algébrica	66
4.2.2	Estimação	79
4.2.3	Normalidade	82
4.2.4	Exemplo de Aplicação	86
4.3	Modelo Global	92
4.3.1	Estrutura Algébrica	93
4.3.2	Estimação	101
4.3.3	Exemplo de Aplicação	103
5	Cruzamento de Aninhamentos em Escada Estruturados	109
5.1	Resultados Gerais para o Cruzamento	110
5.2	Cruzamento de Modelos Globais	111
5.2.1	Exemplo de Aplicação	115
5.3	Cruzamento de Modelos Degrau a Degrau	133
6	Considerações Finais e Perspectivas Futuras	139

Lista de Figuras

3.1.1 Modelo com aninhamento equilibrado	39
3.1.2 Modelo com aninhamento em escada	39
3.1.3 Modelo com aninhamento em escada (9 tratamentos)	40
3.1.4 Modelo com aninhamento em escada (9 tratamentos) versus modelo com aninhamento equilibrado (24 tratamentos)	41
4.1.1 Modelo com aninhamento em escada versus modelo com aninhamento estruturado	64
4.1.2 Modelo com aninhamento em escada	64
4.1.3 Modelo com aninhamento em escada estruturado	65
4.2.1 Modelo com aninhamento em escada estruturado, com 3 degraus e 4 factores	86
5.2.1 Cruzamento de dois modelos com aninhamento em escada estruturado	116
5.2.2 Efeitos para os vários modelos	116
5.3.1 ℓ -ésimo modelo com aninhamento em escada estruturado - bases prin- cipais das álgebras de Jordan comutativas	134
5.3.2 Cruzamento de L modelos com aninhamento em es- cada estruturado - bases principais das álgebras de Jordan comutativas	135

Lista de Tabelas

5.2.1 Matrizes da família \underline{M}	126
5.2.2 Matrizes da família \underline{Q}	127
5.2.3 Matrizes da família \underline{Q} (Continuação da tabela anterior)	128
5.2.4 Matrizes da família $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}$	129
5.2.5 Matrizes da família $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}$ (Continuação da tabela anterior)	130
5.2.6 Graus de liberdade do cruzamento	131
5.2.7 Graus de liberdade do cruzamento (Continuação da tabela anterior) .	132

Capítulo 1

Introdução

No delineamento experimental de uma dada experiência, é usual ser analisado mais do que um factor, podendo originar vários modelos, dependendo estes da relação existente entre os diferentes factores.

Um dos modelos utilizados é o aninhamento. Quando se tem um modelo com aninhamento de vários factores, significa que para cada nível do 1º factor são considerados os níveis do 2º factor, para cada nível do 2º factor são considerados os níveis do 3º factor e assim sucessivamente. Diz-se que o 1º factor aninha o 2º, o 2º aninha o 3º e assim por diante, existindo uma relação de hierarquia entre os factores. Os níveis do factor aninhado não são os mesmos em todos os níveis do factor que aninha (factor principal), pelo que o factor aninhado não pode ser considerado sem que seja indicado qual o nível do factor principal em que ele está aninhado. Quando se muda o nível de um factor, mudam-se também os níveis do outro factor, não sendo possível testar efeitos de interacção. O aninhamento mais usual é o aninhamento equilibrado. Neste tipo de aninhamento, em todos os níveis do factor principal é considerado o mesmo número de níveis do factor aninhado. Nos modelos com aninhamento equilibrado o número de tratamentos é geralmente elevado, pois é dado pelo produto do número de níveis para cada factor.

Os modelos com aninhamento em escada são uma boa alternativa à utilização dos modelos com aninhamento equilibrado, ver [Fernandes et al., 2012], pois permitem economizar grandemente no número de observações, já que o número de tratamentos é a soma do número de níveis dos factores, em vez do seu produto. Nestes modelos os níveis do 1º factor são combinados com um único nível para cada um dos factores seguintes, depois um único nível do 1º factor é combinado com os níveis do 2º factor e com um único nível para cada um dos factores seguintes e assim sucessivamente. Os modelos com aninhamento em escada foram introduzidos por [Cox and Solomon, 2003], e a estrutura algébrica para estes modelos foi proposta por [Fernandes et al., 2010], dando origem a trabalhos mais recentes como [Fernandes et al., 2011], [Fernandes et al., 2012] e [Fernandes et al., 2014].

No aninhamento em escada, a cada degrau do modelo corresponde um factor. Neste trabalho vamos apresentar um desenvolvimento natural destes modelos, em que por degrau se podem considerar vários factores. Iremos estender a teoria dos aninhamentos em escada, de forma a incluir a possibilidade de se desagregar cada um dos factores intervenientes, passando os degraus do modelo a terem submodelos com estruturas ortogonais.

Além do aninhamento em escada estruturado, estudaremos os modelos obtidos cruzando vários desses aninhamentos. O cruzamento é outra das relações utilizadas na construção de modelos. No cruzamento, todos os níveis de cada factor envolvido, são combinados com todos os níveis dos outros factores. Assim, o número de tratamentos é o número de todas as combinações possíveis dos níveis dos factores, podendo ser testados os efeitos de todos os factores e das interações entre eles.

No estudo, do aninhamento em escada e cruzamento, vão ser utilizadas álgebras de Jordan comutativas e operações binárias entre as bases principais dessas álgebras. O produto de Kronecker e o produto de Kronecker restrito estão associados aos modelos com cruzamento e aninhamento, respectivamente, e foram introduzidos por

[Fonseca et al., 2006]. No caso do aninhamento em escada, foi introduzida uma nova operação entre álgebras de Jordan, ver [Fernandes et al., 2010], designada por produto cartesiano. As álgebras de Jordan comutativas são espaços lineares, constituídos por matrizes simétricas que comutam e que contêm os quadrados das suas matrizes. Cada álgebra de Jordan comutativa tem uma base única, a base principal, constituída por matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortogonais, ver [Seely, 1971], o que permite uma apresentação unificada dos modelos ortogonais.

Usaremos um modelo de efeitos aleatórios

$$\mathbf{y} = \sum_{h=0}^w \mathbf{X}(h)\boldsymbol{\beta}(h) \quad (1.1)$$

onde as matrizes $\mathbf{X}(h)$, $h = 0, \dots, w$, são designadas por matrizes de incidência e os vectores $\boldsymbol{\beta}(h)$, $h = 1, \dots, w$, correspondem aos efeitos dos factores e das interações. Admitiremos ainda que, $\boldsymbol{\beta}(0)$ é fixo e que os vectores dos efeitos, $\boldsymbol{\beta}(h)$, $h = 1, \dots, w$, são aleatórios e independentes com vectores médios nulos e com matrizes de covariância $\sigma^2(h)\mathbf{I}_{c(h)}$, $h = 1, \dots, w$, em que $c(h) = \text{car}(\mathbf{X}(h))$, $h = 1, \dots, w$. Este modelo vai pertencer à classe dos modelos ortogonais ou com estrutura ortogonal.

Um modelo diz-se ortogonal quando as matrizes

$$\mathbf{M}(h) = \mathbf{X}(h)\mathbf{X}^t(h), \quad h = 1, \dots, u$$

comutam, ou seja, quando

$$\mathbf{M}(h)\mathbf{M}(h') = \mathbf{M}(h')\mathbf{M}(h), \quad h, h' = 1, \dots, u.$$

Iremos ver que, o facto dessas matrizes comutarem, vai permitir concluir que pertencem a uma álgebra de Jordan comutativa, que é gerada por elas, e como tal vai ser possível escrever a matriz de covariância do modelo (1.1) na forma

$$\mathbf{COV}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^m \gamma(k) \mathbf{Q}(k)$$

em que as matrizes $\mathbf{Q}(k)$, $k = 1, \dots, m$, constituem a base principal da álgebra de Jordan comutativa a que o modelo está associado. As $\gamma(k)$, $k = 1, \dots, m$, têm o nome de componentes de variância canônicas. A estimação das componentes de variância iniciais, $\sigma^2(h)$, $h = 1, \dots, w$, é feita com base na relação entre $\gamma(k)$ e $\sigma^2(h)$. Veremos também que, admitindo a normalidade do modelo, vamos obter estatísticas suficientes.

O presente trabalho inclui já observações e considerações que resultaram da publicação de alguns resultados em revista, assim como da sua apresentação em conferências. A este respeito ver [Monteiro et al., 2012], [Monteiro et al., 2013], [Monteiro and Mexia, 2013] e [Mexia and Monteiro, 2014].

Relativamente à organização, esta tese é constituída por 6 capítulos. No capítulo seguinte, capítulo 2, serão apresentados alguns resultados preliminares, imprescindíveis no trabalho que vamos desenvolver. Neste capítulo destacam-se as álgebras de Jordan comutativas, dada a sua importância na teoria a desenvolver nos capítulos seguintes.

No capítulo 3 vai ser estudado o aninhamento em escada, uma vez que este modelo está na base do aninhamento em escada estruturado. Além da abordagem usual, que designamos por global, apresentar-se-á também uma nova abordagem que designamos por degrau a degrau. Esta abordagem permite simplificar a perspectiva com que analisamos os degraus do modelo. A ideia principal é dividir um modelo complexo, em vários modelos mais simples. Para exprimir a estrutura algébrica do aninhamento em escada, será usada a álgebra de Jordan comutativa a que o modelo está associado.

O capítulo 4 será a parte principal deste trabalho e centrar-se-á no modelo com aninhamento em escada estruturado. A estrutura algébrica deste modelo vai ser

introduzida recorrendo à abordagem degrau a degrau, já apresentada no capítulo 3, seguindo-se a abordagem global. A análise do modelo será feita recorrendo às álgebras de Jordan comutativas. As duas abordagens, apesar de originarem diferentes estruturas para o modelo, permitem obter os mesmos estimadores para os parâmetros de interesse. Será ainda apresentado um exemplo de aplicação resolvido pelas duas abordagens.

O cruzamento de modelos com aninhamento em escada estruturado será abordado no capítulo 5. Começaremos por estabelecer resultados gerais para o cruzamento de modelos e depois vamos particularizar para o caso dos aninhamentos em escada estruturados. Neste capítulo recorreremos à abordagem global, já considerada no capítulo anterior. Como estes modelos são bastante gerais, vamos apresentar ainda um exemplo de aplicação.

No último capítulo serão apresentadas as conclusões do trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

2.1 Bases Ortonormadas e Projecções Ortogonais

Definição 2.1.1. *Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ vectores de um espaço vectorial \mathcal{E} sobre um corpo \mathbb{K} . Um vector $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ é combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tais que*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{v}_i. \quad (2.1.1)$$

Definição 2.1.2. *Seja \mathcal{E} um espaço vectorial sobre \mathbb{K} . Os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathcal{E}$ são linearmente independentes se*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0. \quad (2.1.2)$$

Definição 2.1.3. *Seja \mathcal{E} um espaço vectorial sobre \mathbb{K} . Diz-se que os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_\ell$ são geradores do espaço e escreve-se*

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_\ell \rangle \quad (2.1.3)$$

se um qualquer vector de \mathcal{E} se pode escrever como combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_\ell$.

Se os elementos de um espaço vectorial forem matrizes define-se também espaço gerado por uma matriz.

Definição 2.1.4. *O espaço gerado por uma matriz \mathbf{A} é definido como o espaço gerado pelas colunas da matriz e é designado por espaço imagem de \mathbf{A} . O espaço imagem de \mathbf{A} é um espaço vectorial representado por $R(\mathbf{A})$, em que*

$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathcal{E}\}. \quad (2.1.4)$$

Sempre que o número de vectores que gera um espaço vectorial é finito o espaço diz-se finitamente gerado.

Define-se agora base de um espaço vectorial como

Definição 2.1.5. *Seja \mathcal{E} um espaço vectorial finitamente gerado. O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base se :*

1. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente independentes;
2. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto de geradores de \mathcal{E} .

Corolário 2.1.1. *Se \mathcal{E} é um espaço vectorial finitamente gerado então todas as suas bases têm o mesmo número de vectores.*

Definição 2.1.6. *Seja \mathcal{E} é um espaço vectorial finitamente gerado. O número de vectores de qualquer base de \mathcal{E} designa-se por dimensão.*

Os espaços vectoriais, no que se segue, são todos de dimensão finita sobre o corpo dos reais.

Definição 2.1.7. *Seja \mathcal{E} um espaço vectorial real. Chama-se produto interno em \mathcal{E} a toda a aplicação que a cada par de vectores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ faz corresponder o número real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ verificando as seguintes condições, para quaisquer vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}$ e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,*

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$;
3. $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$;
4. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ se e só se $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathcal{E}}$.

Para \mathbb{R}^n , espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo dos reais, é usual definir-se o produto interno entre os vectores $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^t$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^t$ como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Definição 2.1.8. *Seja \mathcal{E} um espaço euclidiano e $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$. Chama-se norma associada ao produto interno definido em \mathcal{E} ao número*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a norma definida para o produto interno usual é dada por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^t \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Definição 2.1.9. *Sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} dois vectores de um espaço euclidiano \mathcal{E} . Os vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} dizem-se vectores ortogonais se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.*

Definição 2.1.10. *Um conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ diz-se ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois. Se, além de ortogonais dois a dois, todos os vectores têm norma igual a 1 então o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ diz-se ortonormado.*

Definição 2.1.11. *Se as linhas (ou colunas) de uma matriz \mathbf{B} , de ordem k , formam um conjunto ortonormado de vectores então*

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^t = \mathbf{B}^t\mathbf{B} = \mathbf{I}_k$$

e diz-se que \mathbf{B} é uma matriz ortogonal.

Definição 2.1.12. Uma base de um espaço vectorial \mathcal{E} diz-se ortonormada se o conjunto de vectores que a constituem for ortonormado.

Para um espaço euclidiano \mathcal{E} de dimensão finita, com excepção do $\{\mathbf{0}\}$, é sempre possível obter uma base ortonormada de \mathcal{E} . O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt permite obter uma base ortonormada de \mathcal{E} partindo de uma qualquer base de \mathcal{E} .

Sendo \mathcal{S} um subconjunto não vazio do espaço vectorial \mathcal{E} , se \mathcal{S} ainda é um espaço vectorial então \mathcal{S} diz-se um subespaço vectorial de \mathcal{E} .

Definição 2.1.13. Seja \mathcal{S} um subespaço vectorial de \mathcal{E} . Diz-se que um elemento de \mathcal{E} é ortogonal a \mathcal{S} se é ortogonal a todos os elementos de \mathcal{S} . O conjunto dos vectores ortogonais a \mathcal{S} diz-se o complemento ortogonal de \mathcal{S} e representa-se por

$$\mathcal{S}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}\}.$$

Podemos então estabelecer os seguintes teoremas

Teorema 2.1.1. Se \mathcal{S} é um subespaço vectorial de \mathcal{E} então o complemento ortogonal de \mathcal{S} , \mathcal{S}^\perp , também é um subespaço vectorial de \mathcal{E} .

Teorema 2.1.2. Seja \mathcal{S} um subespaço vectorial de \mathcal{E} . Então $\mathcal{E} = \mathcal{S} \boxplus \mathcal{S}^\perp$, com \boxplus representando a soma directa ortogonal de subespaços vectoriais, isto é, qualquer vector $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ pode escrever-se de maneira única na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_{\mathcal{S}^\perp} \quad \text{com } \mathbf{x}_\mathcal{S} \in \mathcal{S} \text{ e } \mathbf{x}_{\mathcal{S}^\perp} \in \mathcal{S}^\perp.$$

Os vectores $\mathbf{x}_\mathcal{S}$ e $\mathbf{x}_{\mathcal{S}^\perp}$ dizem-se, respectivamente, as projecções ortogonais do vector \mathbf{x} sobre os subespaços \mathcal{S} e \mathcal{S}^\perp .

2.2 Matriz de Projectão Ortogonal e Matriz Simétrica

A projectão ortogonal de um vector \mathbf{x} num subespaço vectorial \mathcal{S} pode ser representada também na forma matricial.

Teorema 2.2.1. *Suponha-se que as linhas da matriz \mathbf{A} formam uma base ortonormal para o espaço vectorial \mathcal{S} , o qual é um subespaço de \mathcal{E} . Se $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$, a projectão ortogonal de \mathbf{x} sobre \mathcal{S} é dada por*

$$\mathbf{x}_{\mathcal{S}} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Tem-se então a definição

Definição 2.2.1. *A matriz $\mathbf{Q}(\mathcal{S}) = \mathbf{A}^t \mathbf{A}$ é a matriz de projectão ortogonal sobre \mathcal{S} .*

Com base no exposto e de acordo com (2.1.4) tem-se que $R(\mathbf{Q}(\mathcal{S})) = \mathcal{S}$.

Note-se que, apesar de um espaço vectorial \mathcal{S} não ter apenas uma base ortonormal, a matriz de projectão ortogonal sobre esse espaço, construída a partir de uma qualquer base, é única.

Segue-se a proposição

Proposição 2.2.1. *Uma matriz é matriz de projectão ortogonal se e só se for idempotente e simétrica.*

Definição 2.2.2. *Sejam \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 duas matrizes de projectão ortogonal de ordem k . Quando*

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}_{k \times k}$$

as matrizes dizem-se mutuamente ortogonais.

Tem-se ainda,

Proposição 2.2.2. *Dois subespaços são ortogonais se e só se as matrizes de projecção ortogonal que os geram também o forem.*

As famílias de matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortogonais vão ter, neste trabalho, um papel crucial.

Considere-se agora \mathbf{M} uma matriz de ordem n . Os valores próprios da matriz \mathbf{M} obtêm-se calculando as raízes de $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}|$. A multiplicidade algébrica dos valores próprios será dada pela multiplicidade dessas raízes. Se λ_i é um valor próprio de \mathbf{M} e $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, então \mathbf{x} é vector próprio de \mathbf{M} associado ao valor próprio λ_i , $i = 1, \dots, k$. Os vectores próprios associados a λ_i geram o subespaço próprio associado ao valor próprio λ_i , $i = 1, \dots, k$. A dimensão desses subespaços próprios é a multiplicidade geométrica dos valores próprios.

Definição 2.2.3. *Uma matriz quadrada \mathbf{M} diz-se ser uma matriz simétrica se*

$$\mathbf{M}^t = \mathbf{M}. \quad (2.2.1)$$

Se \mathbf{M} for uma matriz simétrica, tem-se que a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica dos valores próprios da matriz \mathbf{M} são iguais.

Definição 2.2.4. *Qualquer matriz quadrada que possa ser transformada numa matriz diagonal, através da multiplicação por uma matriz regular e pela sua inversa, diz-se ser uma matriz diagonalizável. A matriz que a diagonaliza designa-se por matriz diagonalizadora.*

Se \mathbf{M} é uma matriz simétrica, de ordem n , então existe uma matriz diagonalizadora ortogonal

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \cdots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix}^t \quad (2.2.2)$$

tal que

$$\mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{P}^t = D(\lambda_1 \mathbf{I}_{m_1}, \dots, \lambda_k \mathbf{I}_{m_k}). \quad (2.2.3)$$

Então $D(\lambda_1 \mathbf{I}_{m_1}, \dots, \lambda_k \mathbf{I}_{m_k})$ é uma matriz diagonal, cujos elementos principais são os diferentes valores próprios da matriz \mathbf{M} , $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ com multiplicidades

$$m_1, \dots, m_k,$$

respectivamente, tal que $m_1 + \dots + m_k = n$. As linhas da matriz \mathbf{P} , que são os vectores próprios ortonormados correspondentes a cada um dos valores próprios de \mathbf{M} , formam uma base ortonormada para o respectivo subespaço próprio.

Sejam

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$$

as matrizes cujas linhas são constituídas pelos vectores próprios ortonormados associados aos diferentes valores próprios da matriz \mathbf{M} , então

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^t & \dots & \mathbf{A}_k^t \end{bmatrix}^t \quad (2.2.4)$$

e as matrizes de projecção ortogonal sobre os subespaços gerados pelos vectores próprios associados a λ_i , são dadas por

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i^t \mathbf{A}_i, \quad i = 1, \dots, k$$

sendo estas matrizes mutuamente ortogonais.

Escrever \mathbf{M} como combinação linear das matrizes de projecção ortogonal, ou seja, das matrizes \mathbf{Q}_i , é bastante importante no estudo que se segue. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os diferentes valores próprios associados à matriz \mathbf{M} , com multiplicidades m_1, \dots, m_k , respectivamente, tal que $m_1 + \dots + m_k = n$, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{P}^t D(\lambda_1 \mathbf{I}_{m_1}, \dots, \lambda_k \mathbf{I}_{m_k}) \mathbf{P} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^t & \cdots & \mathbf{A}_k^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \mathbf{I}_{m_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{A}_j^t \mathbf{A}_j = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{Q}_j.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Por outro lado, a matriz \mathbf{M} também se pode escrever como combinação linear dos vectores próprios ortonormados correspondentes a cada um dos seus valores próprios. Sendo $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ todos os vectores próprios associados aos valores próprios da matriz \mathbf{M} , por (2.2.3), tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{P}^t D(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{P} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \cdots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n^t \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^t.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Dado um conjunto de matrizes, se além de simétricas também comutam entre si, então o resultado seguinte garante que são diagonalizáveis pela mesma matriz ortogonal, ou seja, têm a mesma diagonalizadora ortogonal.

Teorema 2.2.2. *Sejam $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_k$ matrizes simétricas de ordem n . Então existe uma matriz ortogonal \mathbf{P} , tal que $\mathbf{P}\mathbf{M}_i\mathbf{P}^t$ é uma matriz diagonal para cada i se e só se $\mathbf{M}_i\mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j\mathbf{M}_i$ para todos os pares (i, j) .*

2.3 Matriz Inversa de Moore-Penrose

Em estatística, muitas vezes surge a necessidade de inverter uma matriz que não é quadrada, ou que não é regular. A inversa de Moore-Penrose, ver [Pollock, 1979], define que qualquer que seja a matriz \mathbf{W} , quadrada ou não, existe uma e uma só matriz \mathbf{W}^+ que satisfaz as condições seguintes:

$$\begin{cases} \mathbf{W}\mathbf{W}^+\mathbf{W} = \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^+\mathbf{W}\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^+ \\ (\mathbf{W}\mathbf{W}^+)^t = \mathbf{W}\mathbf{W}^+ \\ (\mathbf{W}^+\mathbf{W})^t = \mathbf{W}^+\mathbf{W} \end{cases}$$

A matriz \mathbf{W}^+ que satisfaz as condições anteriores é matriz inversa de Moore-Penrose de \mathbf{W} .

No caso de \mathbf{W} ser regular, tem-se que

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^{-1}.$$

Se \mathbf{W} for uma matriz simétrica então tem-se que

$$(\mathbf{W}^+)^t = (\mathbf{W}^t)^+ = \mathbf{W}^+,$$

pelo que a sua inversa de Moore-Penrose também o será.

Se as linhas de uma matriz \mathbf{W} formarem uma base ortonormada então tem-se que a sua inversa de Moore-Penrose é igual à matriz transposta, ou seja, $\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^t$. Seja agora \mathbf{Q} uma matriz de projecção ortogonal. Como

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$$

e

$$(\mathbf{Q}\mathbf{Q})^t = \mathbf{Q}^t\mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}\mathbf{Q},$$

então verificam-se as condições da matriz inversa de Moore-Penrose. Assim, tem-se que se \mathbf{Q} for uma matriz de projecção ortogonal, então a inversa de Moore-Penrose é a própria matriz, ou seja, $\mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}$.

Se \mathbf{M} for uma matriz simétrica, como $\mathbf{M} = \mathbf{P}^t D(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{P}$ e as linhas da matriz \mathbf{P} formam uma base ortonormada, então

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{P}^t D(\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+) \mathbf{P}$$

onde

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i^{-1} & , \quad \lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, n \\ 0 & , \quad \lambda_i = 0, i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

A matriz de projecção ortogonal sobre o espaço gerado pela matriz \mathbf{X} , $\Omega = R(\mathbf{X})$, ver [Mexia, 1995], é dada por

$$\mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{Q}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^+ \mathbf{X}^t = \mathbf{X} \mathbf{X}^+$$

onde

$$\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^+ \mathbf{X}^t$$

o que reduz o problema de obter a inversa de Moore-Penrose apenas para matrizes que sejam simétricas.

2.4 Produto de Kronecker entre Matrizes

Nesta secção apresentamos o produto de Kronecker, bem como alguns resultados que serão úteis. Mais informação sobre este produto pode ser encontrada, por exemplo, em [Schott, 1997], [Rao and Rao, 1998] e [Steeb and Hardy, 2011].

Definição 2.4.1. Dadas as matrizes $\mathbf{A}_{r \times s} = [a_{i,j}]$ e $\mathbf{B}_{u \times v}$, o respectivo produto de Kronecker será uma matriz do tipo $ru \times sv$ dada por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1s}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}\mathbf{B} & \cdots & a_{rs}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Este produto, apesar de não ser comutativo, verifica

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$$

sendo uma operação associativa.

Seja $\mathbf{1}_n$ o vector coluna $n \times 1$ em que todas as componentes são iguais a 1 e $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t$. Então

$$\begin{cases} \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_{nm} \\ \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m = \mathbf{I}_{nm} \\ \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{J}_m = \mathbf{J}_{nm}. \end{cases}$$

Os resultados seguintes apresentam propriedades do produto de Kronecker que resultam, na sua maioria, da aplicação imediata da definição anterior.

Teorema 2.4.1. *Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes quaisquer. Então*

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$, com \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes do mesmo tipo
2. $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$, com \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes do mesmo tipo.

Teorema 2.4.2. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes quaisquer e α e β escalares quaisquer. Então*

1. $\alpha \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \alpha = \alpha \mathbf{A}$
2. $(\alpha \mathbf{A}) \otimes (\beta \mathbf{B}) = \alpha \beta (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$.

Teorema 2.4.3. *Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} vectores quaisquer. Então*

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^t = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^t = \mathbf{b}^t \otimes \mathbf{a}.$$

Teorema 2.4.4. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes quaisquer. Então*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t \otimes \mathbf{B}^t.$$

Em particular tem-se,

Corolário 2.4.1. *Se \mathbf{A} e \mathbf{B} forem matrizes simétricas quaisquer tem-se que*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^t = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B},$$

pelo que o produto de Kronecker de matrizes simétricas ainda é uma matriz simétrica.

O resultado seguinte combina o produto de Kronecker com o produto usual entre matrizes,

Teorema 2.4.5. *Se os produtos usuais entre matrizes $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$ estão definidos tem-se*

$$(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2)(\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) \otimes (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)$$

e vem que

Corolário 2.4.2. *Se \mathbf{A} e \mathbf{B} forem matrizes idempotentes quaisquer então*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^2 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B},$$

pelo que o produto de Kronecker de matrizes idempotentes ainda é uma matriz idempotente.

Proposição 2.4.1. *Sejam $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{B})$ matrizes de projecção ortogonal sobre $R(\mathbf{A})$ e $R(\mathbf{B})$, respectivamente. Então*

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{Q}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{Q}(\mathbf{B})$$

é a matriz de projecção ortogonal sobre $R(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$.

Teorema 2.4.6. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes quaisquer. Então*

$$\text{car}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{car}(\mathbf{A}) \times \text{car}(\mathbf{B}).$$

2.5 Álgebras de Jordan Comutativas

O objectivo desta secção é introduzir as álgebras de Jordan comutativas constituídas por matrizes simétricas. Apresentam-se os conceitos e resultados mais importantes, bem como as operações binárias sobre estas álgebras.

2.5.1 Definição e Conceitos Fundamentais

As álgebras de Jordan foram introduzidas por [Jordan et al., 1934], na reformulação algébrica para mecânica quântica. Mais tarde, em [Seely, 1970a] foram redescobertas e usadas em Inferência Estatística Linear. A linha de investigação iniciada por Seely, originou desenvolvimentos relevantes nesta área, ver [Seely, 1970b], [Seely, 1971], [Seely, 1977], [Seely and Zyskind, 1971]. Mais recentemente essas estruturas têm sido utilizadas nos mais diversos trabalhos, ver [Zmyślony and Drygas, 1992], [VanLeeuwen et al., 1998], [VanLeeuwen et al., 1999], [Fonseca et al., 2007], [Fonseca et al., 2008] e [Carvalho et al., 2015].

De forma a evitar questões para além dos objectivos deste trabalho, as álgebras de Jordan comutativas que vamos considerar são constituídas por matrizes simétricas.

As álgebras de Jordan comutativas são espaços lineares constituídos por matrizes simétricas, que comutam, e que contêm os quadrados das suas matrizes.

Vamos considerar que as matrizes que constituem as álgebras de Jordan comutativas são matrizes reais de ordem n .

[Seely, 1971] mostrou que, cada álgebra de Jordan comutativa \mathcal{A} tem uma única base $\{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m\}$, constituída por matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortogonais. Esta base designa-se por base principal e representa-se por $bp(\mathcal{A})$. Inversamente, cada família de matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortogonais é base principal de uma álgebra de Jordan comutativa. Seja $\underline{Q} = \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m\} = bp(\mathcal{A})$.

Diz-se que uma álgebra de Jordan comutativa \mathcal{A} é completa se

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}_n$$

e vem que $\sum_{j=1}^m g_j = n$ com $g_j = \text{car}(\mathbf{Q}_j)$, $j = 1, \dots, m$. Caso a álgebra de Jordan comutativa não seja completa tem-se $\sum_{j=1}^m g_j < n$, mas se juntarmos à sua base principal a matriz

$$\mathbf{Q}_{m+1} = \mathbf{I}_n - \sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_j$$

então a álgebra de Jordan comutativa passa a ser completa e designa-se por álgebra de Jordan comutativa completada de \mathcal{A} .

Dada uma matriz $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ tem-se que

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{Q}_j = \sum_{j \in C(\mathbf{M})} b_j \mathbf{Q}_j$$

com $C(\mathbf{M}) = \{j : b_j \neq 0\}$.

Como as matrizes \mathbf{Q}_j , $j = 1, \dots, m$, são matrizes de projecção ortogonal então $\mathbf{Q}_j^+ = \mathbf{Q}_j$, e vem que, para uma matriz $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ a matriz inversa de Moore-Penrose

de \mathbf{M} é

$$\mathbf{M}^+ = \left(\sum_{j \in C(\mathbf{M})} b_j \mathbf{Q}_j \right)^+ = \sum_{j \in C(\mathbf{M}^+)} b_j^{-1} \mathbf{Q}_j \in \mathcal{A}$$

com $C(\mathbf{M}^+) = C(\mathbf{M})$. Assim sendo, as álgebras de Jordan comutativas contêm as inversas de Moore-Penrose das suas matrizes.

Seja $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$, e $\nabla_j = R(\mathbf{Q}_j)$, $j = 1, \dots, m$, como os ∇_j são mutuamente ortogonais, então o espaço imagem da matriz \mathbf{M} pode ser escrito como soma directa ortogonal, \boxplus , dos subespaços imagem das matrizes da base principal, ou seja,

$$R(\mathbf{M}) = \sum_{j \in C(\mathbf{M})} b_j R(\mathbf{Q}_j) = \boxplus_{j \in C(\mathbf{M})} \nabla_j \quad (2.5.1)$$

e vem

$$\begin{aligned} \text{car}(\mathbf{M}) &= \dim(R(\mathbf{M})) = \sum_{j \in C(\mathbf{M})} \dim(\nabla_j) \\ &= \sum_{j \in C(\mathbf{M})} \text{car}(\mathbf{Q}_j) = \sum_{j \in C(\mathbf{M})} g_j. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Tem-se ainda que, para $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$, a matriz de projecção ortogonal sobre o espaço gerado pela matriz \mathbf{M} é

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{M}) &= Q(R(\mathbf{M})) = \mathbf{M}\mathbf{M}^+ \\ &= \left(\sum_{j \in C(\mathbf{M})} b_j \mathbf{Q}_j \right) \left(\sum_{j \in C(\mathbf{M})} b_j^{-1} \mathbf{Q}_j \right) \\ &= \sum_{j \in C(\mathbf{M})} \mathbf{Q}_j. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Considere-se agora $\mathbf{Q} \in \mathcal{A}$ uma matriz de projecção ortogonal. Como \mathbf{Q} é matriz de projecção ortogonal então \mathbf{Q} vai ser idempotente, ou seja, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2$. Por outro lado, uma vez que as matrizes \mathbf{Q}_j , $j = 1, \dots, m$, também são matrizes idempotentes e mutuamente ortogonais, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^2 &= \left(\sum_{j=1}^m b_j \mathbf{Q}_j \right)^2 = (b_1 \mathbf{Q}_1 + \cdots + b_m \mathbf{Q}_m) (b_1 \mathbf{Q}_1 + \cdots + b_m \mathbf{Q}_m) \\
&= \sum_{j=1}^m b_j^2 \mathbf{Q}_j
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

e vem que

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{Q}_j = \sum_{j=1}^m b_j^2 \mathbf{Q}_j \\
&\Leftrightarrow b_j^2 = b_j \Leftrightarrow b_j = 0 \vee b_j = 1, j = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Assim, sendo

$$\mathbf{Q} = \sum_{j \in C(\mathbf{Q})} \mathbf{Q}_j \tag{2.5.6}$$

com $C(\mathbf{Q}) = \{j; b_j \neq 0\}$, ou seja, cada matriz de projecção ortogonal que pertença a uma álgebra de Jordan comutativa será dada pela soma de todas, ou de uma parte das matrizes da sua base principal.

Usando (2.5.2) e (2.5.6), tem-se que, se a matriz $\mathbf{Q} \in \mathcal{A}$ for uma matriz de projecção ortogonal com $\text{car}(\mathbf{Q}) = 1$ então $\mathbf{Q} \in bp(\mathcal{A})$.

Uma álgebra de Jordan comutativa \mathcal{A} diz-se regular se $\frac{1}{n} \mathbf{J}_n \in \mathcal{A}$. Se \mathcal{A} for uma álgebra de Jordan comutativa regular $\frac{1}{n} \mathbf{J}_n \in \mathcal{A}$ e como $\frac{1}{n} \mathbf{J}_n$ é matriz de projecção ortogonal e $\text{car}(\frac{1}{n} \mathbf{J}_n) = 1$ então $\frac{1}{n} \mathbf{J}_n \in bp(\mathcal{A})$. Então tem-se ainda que se $\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{n} \mathbf{J}_n$ a álgebra de Jordan comutativa \mathcal{A} é regular.

É fácil verificar que álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(s)$ com base principal $\{\frac{1}{s} \mathbf{J}_s, \mathbf{K}_s\}$, onde $\mathbf{K}_s = \mathbf{I}_s - \frac{1}{s} \mathbf{J}_s$, é uma álgebra de Jordan comutativa regular e completa. Tem-se que $\mathbf{K}_s = \mathbf{T}_s^t \mathbf{T}_s$ com \mathbf{T}_s uma matriz do tipo $(s-1) \times s$, que se obtém retirando a 1ª linha igual a $\frac{1}{\sqrt{s}} \mathbf{1}_s^t$ de uma matriz ortogonal de ordem s .

Os vectores que constituem as linhas da matriz \mathbf{T}_s são vectores de contrastes, mutuamente ortogonais e de norma 1.

Sendo \mathbf{A}_j uma matriz cujos vectores linha constituem uma base ortonormada para o espaço $\nabla_j = R(\mathbf{Q}_j)$, $j = 1, \dots, m$, então tem-se

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j^t \mathbf{A}_j & , \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{A}_j \mathbf{A}_j^t = \mathbf{I}_{g_j} & , \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{A}_j \mathbf{A}_{j'}^t = \mathbf{0}_{g_j \times g_{j'}} \quad , j \neq j' & , \quad j, j' = 1, \dots, m, \end{array} \right. \quad (2.5.7)$$

onde

$$g_j = \text{car}(\mathbf{Q}_j) = \text{car}(\mathbf{A}_j) = \dim(\nabla_j) \quad , \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.5.8)$$

Sendo $\underline{Q} = bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m\}$ então, usando as matrizes \mathbf{A}_j definidas anteriormente, podemos escrever

$$\underline{Q}^{\frac{1}{2}} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\} = bp^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}).$$

Tem-se ainda que se uma álgebra de Jordan comutativa for regular então $\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{s}} \mathbf{1}_s^t$.

Seja agora $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ uma matriz regular. Então

$$\mathbf{M} = \sum_{j \in C(\mathbf{M})} b_j \mathbf{Q}_j$$

com $C(\mathbf{M}) = \{j : b_j \neq 0\}$ e $\text{car}(\mathbf{M}) = n$. Usando (2.5.2), $\text{car}(\mathbf{M}) = \sum_{j \in C(\mathbf{M})} g_j$ pelo que $\sum_{j \in C(\mathbf{M})} g_j = n$ e então $C(\mathbf{M}) = \{1, \dots, m\}$. Tem-se assim que $\sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}_n$, logo \mathcal{A} é completa. Assim sendo, se uma álgebra de Jordan comutativa contém matrizes regulares então é completa. O recíproco também se verifica, ou seja, se \mathcal{A} é completa $\sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}_n \in \mathcal{A}$. Como \mathbf{I}_n é uma matriz regular então \mathcal{A} contém matrizes regulares.

Relembremos agora que para $\mathbf{M} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{Q}_j$ matriz simétrica, existe uma matriz \mathbf{P} , diagonalizadora ortogonal, tal que

$$\mathbf{PMP}^t = D(b_1 \mathbf{I}_{g_1}, \dots, b_m \mathbf{I}_{g_m})$$

onde $D(b_1 \mathbf{I}_{g_1}, \dots, b_m \mathbf{I}_{g_m})$ é uma matriz diagonal, cujos elementos principais, b_1, \dots, b_m , são os valores próprios da matriz \mathbf{M} , com multiplicidades g_1, \dots, g_m , respectivamente. As linhas da matriz \mathbf{P} , que são os vectores próprios ortonormados correspondentes a cada um dos valores próprios de \mathbf{M} , formam uma base ortonormada para o respectivo subespaço próprio.

Por outro lado, se \mathcal{A} for uma álgebra de Jordan comutativa completa, então \mathcal{A} contém matrizes regulares. Se $\mathbf{M} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{Q}_j$ for uma dessas matrizes regulares então $b_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$ e vem que

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{P}^t D(b_1 \mathbf{I}_{g_1}, \dots, b_m \mathbf{I}_{g_m}) \mathbf{P}| = \prod_{j=1}^m b_j^{g_j}. \quad (2.5.9)$$

Se \mathbf{M} é regular tem-se ainda que

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{j=1}^m b_j^{-1} \mathbf{Q}_j.$$

Seja $\underline{M} = \{\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_w\}$ uma família de matrizes da álgebra de Jordan comutativa \mathcal{A} . Nesse caso tem-se

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j=1}^m b_{i,j} \mathbf{Q}_j, \quad i = 1, \dots, w \quad (2.5.10)$$

A matriz $\mathbf{B} = [b_{i,j}]$, $i = 1, \dots, w$, $j = 1, \dots, m$ designa-se por matriz de transição entre \underline{M} e \underline{Q} , $\underline{M} \setminus \underline{Q}$. Esta matriz é invertível se e só se $w = m = \dim(\mathcal{A})$ e nesse caso para $\mathbf{B}^{-1} = [b^{\ell,h}]$ vem que

$$\mathbf{Q}_\ell = \sum_{h=1}^w b^{\ell,h} \mathbf{M}_h, \quad \ell = 1, \dots, m \quad (2.5.11)$$

e \underline{M} será uma base para \mathcal{A} .

Comecemos por relembrar que as matrizes de uma família

$$\underline{M} = \{\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_w\}$$

de matrizes simétricas comutam se e só se essas matrizes forem diagonalizáveis pela mesma matriz ortogonal \mathbf{P} . Então temos que

$$\underline{M} \subset \mathcal{V}(\mathbf{P}),$$

com $\mathcal{V}(\mathbf{P})$ a família das matrizes simétricas diagonalizáveis por \mathbf{P} . Como $\mathcal{V}(\mathbf{P})$ é uma álgebra de Jordan comutativa, então a família \underline{M} está contida numa álgebra de Jordan comutativa se e só se as suas matrizes comutarem. Uma vez que a intersecção de álgebras de Jordan comutativas ainda é uma álgebra de Jordan comutativa, se as matrizes de \underline{M} comutam, então existe a mais pequena álgebra de Jordan comutativa contendo \underline{M} . Essa álgebra de Jordan comutativa é gerada por \underline{M} e representa-se por $\mathcal{A}(\underline{M})$. Vejamos como obter a $bp(\mathcal{A}(\underline{M}))$.

Se a matriz diagonalizadora ortogonal das matrizes $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_w$ for \mathbf{P} , os vectores linha da matriz \mathbf{P} , $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, serão os vectores próprios associados aos valores próprios das matrizes de \underline{M} .

Já vimos que, se $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in}$, $i = 1, \dots, w$, são os valores próprios da matriz \mathbf{M}_i então

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{z}_j \mathbf{z}_j^t$$

em que

$$\lambda_{ij} = \mathbf{z}_j^t \mathbf{M}_i \mathbf{z}_j, \quad i = 1, \dots, w, \quad j = 1, \dots, n$$

Podemos considerar uma relação de equivalência, na família dos vectores próprios, em que dois vectores próprios estão relacionados, sempre que estejam associados a valores próprios idênticos para todas as matrizes de \underline{M} .

Defina-se então em $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ a relação de equivalência τ em que $\mathbf{z}_h \tau \mathbf{z}_\ell$ se e só se

$$\mathbf{z}_h^t \mathbf{M}_i \mathbf{z}_h = \mathbf{z}_\ell^t \mathbf{M}_i \mathbf{z}_\ell, \quad i = 1, \dots, w,$$

ou seja, quando \mathbf{z}_h e \mathbf{z}_ℓ , $h \neq \ell$, $h, \ell = 1, \dots, n$, estiverem associados a valores próprios idênticos para todas as matrizes de \underline{M} .

As classes de equivalência definidas por τ podem ser de dois tipos. A classe de equivalência τ é do primeiro tipo se os seus vectores próprios estiverem associados a um valor próprio não nulo para pelo menos uma das matrizes de \underline{M} . Além do primeiro tipo, existe um segundo tipo de classe de equivalência τ , cujos vectores estão associados aos valores próprios nulos para todas as matrizes de \underline{M} . Esta classe de equivalência, se existir é apenas uma. O número de classes associadas ao primeiro tipo será o índice próprio de \underline{M} e o cardinal de cada classe será o número das suas matrizes.

Sejam $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ os conjuntos de índices dos $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ pertencentes às classes de equivalência associadas ao primeiro tipo, as matrizes

$$\mathbf{Q}_j = \sum_{i \in \mathcal{C}_j} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^t, \quad j = 1, \dots, m$$

são matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortogonais, que constituem a base principal de uma álgebra de Jordan comutativa, $\mathcal{A}(\underline{Q})$ com $\underline{Q} = \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m\}$. Se \mathbf{A}_j , $j = 1, \dots, m$, forem as matriz cujas linhas são os vectores próprios pertencentes à classe j então

$$\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j^t \mathbf{A}_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Podemos então estabelecer o seguinte resultado

Proposição 2.5.1. Para $\underline{M} = \{\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_w\}$ e $\underline{Q} = bp(\mathcal{A}(\underline{Q})) = \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m\}$ tem-se que

$$\mathcal{A}(\underline{M}) = \mathcal{A}(\underline{Q}).$$

2.5.2 Operações Binárias sobre Álgebras de Jordan Comutativas

Vamos agora considerar operações binárias sobre as bases principais das álgebras de Jordan comutativas. Veremos mais à frente exemplos de como estas operações, utilizadas em conjunto, permitem a construção de modelos complexos a partir de modelos mais simples.

Começemos por definir o produto de Kronecker entre L famílias de matrizes quaisquer

Definição 2.5.1. Dadas as famílias de matrizes

$$\underline{U}(\ell) = \{\mathbf{U}_{i(\ell)}(\ell), i(\ell) = 1, \dots, h(\ell)\}, \ell = 1, \dots, L$$

a família

$$\underline{U} = \bigotimes_{\ell=1}^L \underline{U}(\ell)$$

é

$$\underline{U} = \left\{ \mathbf{U}_i : \mathbf{U}_i = \bigotimes_{\ell=1}^L \mathbf{U}_{i(\ell)}(\ell) \quad i = 1, \dots, h = \prod_{\ell=1}^L h(\ell) \right\} \quad (2.5.12)$$

com os índices

$$\begin{aligned} i &= (i(1) - 1) h(2) \cdots h(L) + \cdots + (i(L - 1) - 1) h(L) + i(L) \\ &= \sum_{\ell=1}^{L-1} \left[(i(\ell) - 1) \prod_{g=\ell+1}^L h(g) \right] + i(L). \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

O produto de Kronecker, \otimes , é a operação utilizada para construir modelos obtidos por cruzamento e foi introduzida por [Fonseca et al., 2006]. Nestes modelos, os tratamentos serão as combinações dos tratamentos dos modelos iniciais. Se os modelos iniciais estiverem associados às álgebras de Jordan comutativas $\mathcal{A}(1)$ e $\mathcal{A}(2)$, o modelo obtido por cruzamento vai estar associado à álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(1) \otimes \mathcal{A}(2)$.

Segue-se

Proposição 2.5.2. *Seja $\mathcal{A}(\ell)$, $\ell = 1, 2$, álgebras de Jordan comutativas com bases principais $\underline{Q}(\ell) = \{\mathbf{Q}_1(\ell), \dots, \mathbf{Q}_{m(\ell)}(\ell)\}$, com $\ell = 1, 2$, então*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(1) \otimes \mathcal{A}(2)$$

será álgebra de Jordan comutativa com a base principal

$$\underline{Q} = \underline{Q}(1) \otimes \underline{Q}(2)$$

constituída pelas matrizes

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{i(1)}(1) \otimes \mathbf{Q}_{i(2)}(2), \quad i(\ell) = 1, \dots, m(\ell), \quad \ell = 1, 2$$

para os índices

$$i = (i(1) - 1) m(2) + i(2), \quad i = 1, \dots, m, \quad m = m(1) \times m(2).$$

Proposição 2.5.3. *Seja $\mathcal{A}(1)$ e $\mathcal{A}(2)$ álgebras de Jordan comutativas regulares, constituídas por matrizes de ordem $n(1)$ e $n(2)$, como*

$$\frac{1}{n(1)n(2)} \mathbf{J}_{n(1)n(2)} = \frac{1}{n(1)} \mathbf{J}_{n(1)} \otimes \frac{1}{n(2)} \mathbf{J}_{n(2)} \in \mathcal{A}(1) \otimes \mathcal{A}(2)$$

então $\mathcal{A}(1) \otimes \mathcal{A}(2)$ é uma álgebra de Jordan comutativa regular.

Tem-se ainda

Proposição 2.5.4. *Sejam $\mathcal{A}(1)$ e $\mathcal{A}(2)$ álgebras de Jordan comutativas completas, constituídas por matrizes de ordem $n(1)$ e $n(2)$, como*

$$\begin{aligned} \sum_{i(1)=1}^{m(1)} \sum_{i(2)=1}^{m(2)} \mathbf{Q}_{i(1)}(1) \otimes \mathbf{Q}_{i(2)}(2) &= \left(\sum_{i(1)=1}^{m(1)} \mathbf{Q}_{i(1)}(1) \right) \otimes \left(\sum_{i(2)=1}^{m(2)} \mathbf{Q}_{i(2)}(2) \right) \\ &= \mathbf{I}_{n(1)} \otimes \mathbf{I}_{n(2)} = \mathbf{I}_{n(1)n(2)} \end{aligned}$$

então $\mathcal{A}(1) \otimes \mathcal{A}(2)$ é uma álgebra de Jordan comutativa completa.

Como o produto de Kronecker de matrizes goza da propriedade associativa, verifica-se que, ver [Fonseca et al., 2006],

$$\mathcal{A}(1) \otimes (\mathcal{A}(2) \otimes \mathcal{A}(3)) = (\mathcal{A}(1) \otimes \mathcal{A}(2)) \otimes \mathcal{A}(3).$$

Esta propriedade é muito útil quando pretendemos cruzar mais do que dois modelos.

A segunda operação sobre álgebras de Jordan comutativas é o produto de Kronecker restrito, \star , e é útil nos modelos com aninhamento. Tal como o produto de Kronecker, também esta operação foi introduzida por [Fonseca et al., 2006]. Nos modelos com aninhamento cada tratamento de um modelo aninha todos os tratamentos do outro modelo. Neste modelos diz-se que o primeiro modelo aninha o segundo. Se os modelos iniciais estiverem associados às álgebras de Jordan comutativas $\mathcal{A}(1)$ e $\mathcal{A}(2)$, o modelo obtido por aninhamento vai estar associado à álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(1) \star \mathcal{A}(2)$.

Proposição 2.5.5. *Sejam $\mathcal{A}(\ell)$, $\ell = 1, 2$, álgebras de Jordan comutativas completas e regulares com bases principais $\underline{Q}(\ell) = \{\mathbf{Q}_1(\ell), \dots, \mathbf{Q}_{m(\ell)}(\ell)\}$ com $\mathbf{Q}_1(\ell) = \frac{1}{n(\ell)} \mathbf{J}_{n(\ell)}$ e $\sum_{i(\ell)=1}^{m(\ell)} \mathbf{Q}_{i(\ell)}(\ell) = \mathbf{I}_{n(\ell)}$. Então*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(1) \star \mathcal{A}(2)$$

será álgebra de Jordan comutativa com a base principal

$$\underline{Q} = \{\mathbf{Q}_1(1) \otimes \frac{1}{n(2)} \mathbf{J}_{n(2)}, \dots, \mathbf{Q}_{m(1)}(1) \otimes \frac{1}{n(2)} \mathbf{J}_{n(2)}\} \cup \{\mathbf{I}_{n(1)} \otimes \mathbf{Q}_2(2), \dots, \mathbf{I}_{n(1)} \otimes \mathbf{Q}_{m(2)}(2)\}$$

Tem-se ainda, ver [Fonseca et al., 2006],

$$\mathcal{A}(1) \star (\mathcal{A}(2) \star \mathcal{A}(3)) = (\mathcal{A}(1) \star \mathcal{A}(2)) \star \mathcal{A}(3).$$

Outra aplicação para esta operação é a utilização de réplicas. Seja \mathcal{A} a álgebra de Jordan comutativa associada a um modelo em que cada tratamento só tem uma observação. Se num modelo cada tratamento tem r observações então este modelo está associado à álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$, em que $\mathcal{A}(r)$ é uma álgebra de Jordan comutativa com base principal $\{\frac{1}{r} \mathbf{J}_r, \mathbf{I}_r - \frac{1}{r} \mathbf{J}_r\}$. A álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(r)$ é completa e regular, sendo a única álgebra de Jordan comutativa constituída por matrizes $r \times r$, em que a base principal é constituída por essas matrizes. A álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(r)$ é a álgebra associada ao modelo usual para amostras de dimensão r e observações independentes e identicamente distribuídas, com distribuição normal.

A terceira operação binária foi introduzida em [Fernandes et al., 2010] e é utilizada para os modelos com aninhamento em escada. Esta operação vai originar matrizes diagonais por blocos, ou seja, matrizes diagonais cujos elementos na diagonal são eles próprios matrizes.

Definição 2.5.2. *Seja $D(\mathbf{W}(1), \dots, \mathbf{W}(u))$ uma matriz diagonal por blocos, com blocos principais $\mathbf{W}(1), \dots, \mathbf{W}(u)$, e $\mathcal{A}(1), \dots, \mathcal{A}(u)$ álgebras de Jordan comutativas. O produto cartesiano das álgebras de Jordan comutativas $\mathcal{A}(1), \dots, \mathcal{A}(u)$ é*

$$\bigtimes_{h=1}^u \mathcal{A}(h) = \{D(\mathbf{M}(1), \dots, \mathbf{M}(u)) : \mathbf{M}(h) \in \mathcal{A}(h), h = 1, \dots, u\}.$$

Estabelecemos então

Proposição 2.5.6. *Sendo $\mathcal{A}(h)$, $h = 1, 2$, álgebras de Jordan comutativas, constituídas por matrizes de ordem $n(h)$, com bases principais*

$$\underline{Q}(h) = \{\mathbf{Q}_1(h), \dots, \mathbf{Q}_{m(h)}(h)\}, \quad h = 1, 2$$

então

$$\mathcal{A} = \bigtimes_{h=1}^2 \mathcal{A}(h)$$

será uma álgebra de Jordan comutativa com base principal

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \bigtimes_{h=1}^2 \underline{Q}(h) = \{D(\mathbf{Q}_1(1), \mathbf{0}_{n(2) \times n(2)}), \dots, D(\mathbf{Q}_{m(1)}(1), \mathbf{0}_{n(2) \times n(2)})\} \cup \\ &\cup \{D(\mathbf{0}_{n(1) \times n(1)}, \mathbf{Q}_1(2)), \dots, D(\mathbf{0}_{n(1) \times n(1)}, \mathbf{Q}_{m(2)}(2))\}. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Se os modelos iniciais estiverem associados às álgebras de Jordan comutativas $\mathcal{A}(1)$ e $\mathcal{A}(2)$, o modelo obtido por aninhamento em escada, com dois degraus, vai estar associado à álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(1) \times \mathcal{A}(2)$.

2.6 Estatísticas Suficientes e Completas e Estimadores UMVUE

O objectivo desta subsecção é apresentar algumas definições e teoremas sobre estimação pontual, com vista à obtenção de estatísticas suficientes e completas. Estas estatísticas são de grande importância na obtenção de Estimadores Centrados de Variância Uniformemente Mínima (UMVUE - Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator). A obtenção desses estimadores é feita através da utilização do Teorema de Blackwell-Lehmann-Scheffé. Um estudo mais aprofundado, sobre os conteúdos desta secção, pode encontrar-se em [Fraser, 1957], [Silvey, 1975], [Lehmann, 1997] e [Lehmann and Casella, 1998].

Considere-se um parâmetro que caracteriza certa população. Assumindo que esse parâmetro é desconhecido, pretende-se estimar o seu valor a partir de uma amostra da população. Começemos então por definir o conjunto constituído por todas as amostras possíveis de serem seleccionadas. Este conjunto designa-se por espaço amostral e pode ser representado por ξ . Se as amostras tiverem dimensão n , é usual o espaço amostral ser representado por ξ_n . Cada amostra de dimensão n é constituída por n observações e representa-se pelo vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^t$. Este vector é considerado como uma realização do vector aleatório $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix}^t$ com $P(\mathbf{X} \in \xi_n) = 1$.

A função distribuição de \mathbf{X} representa-se por $F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, a função densidade (probabilidade) no caso contínuo (discreto) por $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ e $\boldsymbol{\theta}$ representa um parâmetro vectorial desconhecido. Note-se que dado um parâmetro inicial, uma qualquer função desse parâmetro é considerada também um parâmetro. O espaço onde o parâmetro toma valores representa-se por Θ e designa-se por espaço paramétrico. Nos modelos que se irão estudar, os parâmetros considerados são o valor médio e as componentes de variância.

Dada uma amostra \mathbf{X} , para estimar um parâmetro θ é necessário condensar a informação contida na amostra. Para isso definem-se estatísticas.

Definição 2.6.1. *Uma estatística $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ é uma variável ou um vector aleatório (de dimensão $u \leq n$) que é função da amostra \mathbf{X} e que não envolve qualquer parâmetro desconhecido.*

Interessa considerar estatísticas que condensem os dados da amostra mas sem perder informação sobre o parâmetro. Uma estatística suficiente, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, é uma estatística que contém toda a informação relevante acerca do parâmetro, pelo que dada a estatística suficiente, a amostra \mathbf{X} não traz nenhuma informação adicional sobre o parâmetro.

Definição 2.6.2. *Seja \mathbf{X} uma amostra cujas componentes têm função densidade a pertencer à família $\mathcal{P} = \{f(\cdot|\theta), \theta \in \Theta\}$. A estatística $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ é suficiente para θ (ou para família \mathcal{P}) se a função densidade de \mathbf{X} condicionada por $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{t}$ não depender de θ , ou seja, se*

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{T} = \mathbf{t}, \theta) = f(\mathbf{x}|\mathbf{T} = \mathbf{t}).$$

O teorema seguinte é muito importante pois fornece um critério de suficiência.

Teorema 2.6.1. (Teorema da Factorização) *Seja \mathbf{X} uma amostra cujas componentes têm função densidade a pertencer à família $\mathcal{P} = \{f(\cdot|\theta), \theta \in \Theta\}$. A estatística $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ é suficiente para θ se e só se existirem duas funções não negativas g e h tais que*

$$f(\mathbf{x}|\theta) = g(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \theta)h(\mathbf{x})$$

onde h não depende do parâmetro θ .

A função que depende do parâmetro, $g(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta})$, em geral depende dos valores amostrais apenas para alguma função $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, a qual é a estatística suficiente. Pelo que este teorema descreve também um algoritmo para calcular estatísticas suficientes. As estatísticas suficientes têm propriedades interessantes relacionadas com estimadores centrados.

Definição 2.6.3. *Qualquer estatística que assume valores em Θ designa-se por estimador do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$.*

Para cada amostra, o estimador fornece uma aproximação ao verdadeiro valor do parâmetro, valor esse que se designa por estimativa. Para estimar um mesmo parâmetro podem utilizar-se diferentes estimadores, pelo que é conveniente escolher o estimador que tem as “melhores” propriedades. Entre essas propriedades encontram-se as de centralidade, variância mínima e suficiência.

Definição 2.6.4. *Seja $\ell^*(\mathbf{X})$ um estimador de $\ell(\boldsymbol{\theta})$. Diz-se que $\ell^*(\mathbf{X})$ é um estimador centrado, ou não enviesado, para $\ell(\boldsymbol{\theta})$ se*

$$E[\ell^*(\mathbf{X})] = \ell(\boldsymbol{\theta}) \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta.$$

Caso o estimador seja enviesado tem-se que o enviesamento $e_{\ell^}(\mathbf{x})$ é dado por*

$$e_{\ell^*}(\mathbf{x}) = E[\ell^*(\mathbf{X})] - \ell(\boldsymbol{\theta}).$$

Um estimador pontual é em geral utilizado na construção de um estimador intervalar, pelo que quanto menor for a variância do estimador, maior será a sua eficiência, na medida em que através dele é possível construir, para um determinado grau de confiança, um intervalo com menor amplitude. Assim, além de centrado, também é conveniente um estimador ter variância mínima.

Definição 2.6.5. *Seja $\ell^*(\mathbf{X})$ um estimador de $\ell(\boldsymbol{\theta})$. Diz-se que $\ell^*(\mathbf{X})$ é estimador centrado de variância uniformemente mínima, UMVUE, se*

- $\ell^*(\mathbf{X})$ for centrado
- $V(\ell^*(\mathbf{X})|\boldsymbol{\theta}) \leq V(\ell^+(\mathbf{X})|\boldsymbol{\theta})$ onde $\ell^+(\mathbf{X})$ é qualquer outro estimador centrado.

O teorema seguinte mostra que é possível melhorar um estimador centrado através do uso de estatísticas suficientes.

Teorema 2.6.2. (Teorema Rao-Blackwell) *Seja $\ell^*(\mathbf{X})$ um estimador centrado de $\ell(\boldsymbol{\theta})$, com $\ell(\cdot)$ uma função limitada. Dada a estatística suficiente $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, para*

$$\tilde{\ell}(\mathbf{t}) = E[\ell^*(\mathbf{X})|\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{t}]$$

tem-se que,

- $\tilde{\ell}(\mathbf{t})$ é função da estatística suficiente $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{t}$ mas não de $\boldsymbol{\theta}$;
- $\tilde{\ell}(\mathbf{t})$ é um estimador centrado de $\ell(\boldsymbol{\theta})$;
- $V(\tilde{\ell}|\boldsymbol{\theta}) \leq V(\ell^*|\boldsymbol{\theta})$, para qualquer $\boldsymbol{\theta}$.

Assim, é sempre possível melhorar um estimador centrado, reduzindo a sua variância. Para que a redução na variância seja máxima, ou seja, para obter estimadores UMVUE, é necessário que a estatística, além de suficiente, seja completa.

Definição 2.6.6. *A estatística \mathbf{T} é completa para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ se, para qualquer função ℓ^* ,*

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta : E[\ell^*(\mathbf{T})|\boldsymbol{\theta}] = 0 \Rightarrow \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta : P[\ell^*(\mathbf{T}) = 0|\boldsymbol{\theta}] = 1.$$

Usando a noção de estimador centrado tem-se ainda uma definição alternativa.

Definição 2.6.7. A estatística \mathbf{T} é completa para $\boldsymbol{\theta}$ se, para qualquer função ℓ^* , o único estimador centrado de 0, que é uma função de \mathbf{T} , é a função identicamente nula, isto é,

$$E[\ell^*(\mathbf{T})] = 0 \Rightarrow P[\ell^*(\mathbf{T}) = 0] = 1.$$

Sendo assim, se uma estatística \mathbf{T} é completa então quaisquer duas funções dessa estatística com o mesmo valor médio, para todo o parâmetro $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, são idênticas com probabilidade 1.

Juntando os conceitos de estatística suficiente, completa e estimador centrado temos o teorema seguinte

Teorema 2.6.3. (Teorema Backwell-Lehmann-Sheffé) Se $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ for uma estatística suficiente e completa, e existir um estimador centrado ℓ^* para $\ell(\boldsymbol{\theta})$, então

$$\tilde{\ell}(\mathbf{t}) = E[\ell^*(\mathbf{X}) | \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{t}]$$

é um UMVUE de $\ell(\boldsymbol{\theta})$.

Assim, um estimador centrado função de uma estatística suficiente e completa é, pelo teorema 2.6.3, um estimador UMVUE.

Tem-se ainda

Proposição 2.6.1. Se $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ pertencente à família exponencial s -paramétrica, ou seja,

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = c(\boldsymbol{\theta})h(\mathbf{x})e^{\sum_{i=1}^s q_i(\boldsymbol{\theta})T_i(\mathbf{x})} \quad (2.6.1)$$

onde c e q_i são funções do parâmetro $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, e se espaço paramétrico Θ contém um retângulo de dimensão s , ou o produto cartesiano de s intervalos não degenerados, então a estatística $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = [T_1(\mathbf{x}) \cdots T_s(\mathbf{x})]^t$ é suficiente e completa.

Capítulo 3

Aninhamento em Escada

3.1 Introdução

Nos modelos com aninhamento equilibrado, o elevado número de observações necessárias para se efectuar uma experiência pode fazer com que a sua realização seja economicamente inviável. Além disso, o número de graus de liberdade não se distribui igualmente pelos vários factores, tendo-se poucos graus de liberdade para os primeiros factores. Com o objectivo de ultrapassar as desvantagens do aninhamento equilibrado, [Cox and Solomon, 2003] apresentaram um novo tipo de aninhamento, o aninhamento em escada.

No aninhamento em escada, se considerarmos u factores, teremos u degraus e cada degrau corresponde a um dos factores do modelo. O último degrau pode reflectir as réplicas. Se considerarmos $a(1), \dots, a(u)$ níveis activos para cada um dos factores, no 1º degrau apenas o 1º factor tem vários níveis, $a(1)$, cada um deles aninhando um único nível para cada um dos restantes $u - 1$ factores. No 2º degrau, temos um único nível do 1º factor, combinado com $a(2)$ níveis do 2º factor e com um único nível para cada um dos restantes $u - 2$ factores. Tem-se então que no h -ésimo degrau só existem ramificações para o h -ésimo factor, ou seja,

cada um dos primeiros $h - 1$ factores tem apenas um nível, combinado com $a(h)$ níveis para o h -ésimo factor e com um único nível para cada um dos restantes $u - h$ factores. Este tipo de combinação, dos vários níveis dos diversos factores, faz com que o número de tratamentos, n , seja a soma dos níveis activos em cada degrau. Assim, no aninhamento em escada o número de tratamentos é $\sum_{h=1}^u a(h)$ enquanto no aninhamento equilibrado é $\prod_{h=1}^u a(h)$.

Em relação ao número de níveis dos factores, os dois modelos têm necessariamente diferenças. Para o h -ésimo factor, $h = 1, \dots, u$, existem $c(h) = (u - h) + \sum_{i=1}^h a(i)$ níveis no aninhamento em escada, enquanto no aninhamento equilibrado existem $c(h) = \prod_{i=1}^h a(i)$ níveis.

Relativamente aos graus de liberdade, iremos ver que quando em escada, o aninhamento tem $g(h) = a(h) - 1$ graus de liberdade para cada um dos seus h factores. Sem utilizar a escada verifica-se que os graus de liberdade não estão distribuídos de forma tão equilibrada pois $g(h) = (a(h) - 1) \prod_{i=0}^{h-1} a(i)$.

Na figura 3.1.1 apresenta-se a estrutura de um aninhamento equilibrado com

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 3 \text{ factores} \\ a(1) = 4 \text{ níveis activos para o 1º factor} \\ a(2) = 3 \text{ níveis activos para o 2º factor} \\ a(3) = 2 \text{ níveis activos para o 3º factor,} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 24 \text{ tratamentos} \\ c(1) = 4 \text{ níveis para o 1º factor} \\ c(2) = 12 \text{ níveis para o 2º factor} \\ c(3) = 24 \text{ níveis para o 3º factor} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} g(1) = 3 \text{ graus de liberdade para o 1º factor} \\ g(2) = 8 \text{ graus de liberdade para o 2º factor} \\ g(3) = 12 \text{ graus de liberdade para o 3º factor.} \end{cases}$$

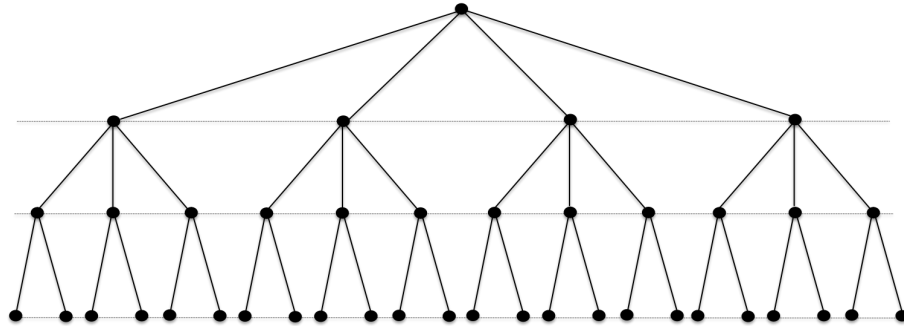


Figura 3.1.1: Modelo com aninhamento equilibrado

Como alternativa à utilização do modelo anterior, na figura 3.1.2 apresenta-se um modelo com aninhamento em escada, com o mesmo número de factores e com o mesmo número de níveis activos por factor.

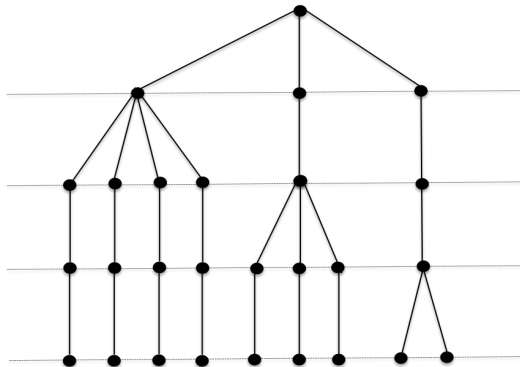


Figura 3.1.2: Modelo com aninhamento em escada

Neste modelo têm-se

$$\begin{cases} u = 3 \text{ factores ou degraus} \\ a(1) = 4 \text{ níveis activos para o 1º factor} \\ a(2) = 3 \text{ níveis activos para o 2º factor} \\ a(3) = 2 \text{ níveis activos para o 3º factor,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 9 \text{ tratamentos} \\ c(1) = 6 \text{ níveis para o 1º factor} \\ c(2) = 8 \text{ níveis para o 2º factor} \\ c(3) = 9 \text{ níveis para o 3º factor} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} g(1) = 3 \text{ graus de liberdade para o 1º factor} \\ g(2) = 2 \text{ graus de liberdade para o 2º factor} \\ g(3) = 1 \text{ graus de liberdade para o 3º factor.} \end{cases}$$

O aninhamento em escada não representa uma parte do aninhamento equilibrado, mas sim um novo modelo. As figuras 3.1.3 e 3.1.4 apresentam os tratamentos para cada um dos modelos anteriores.

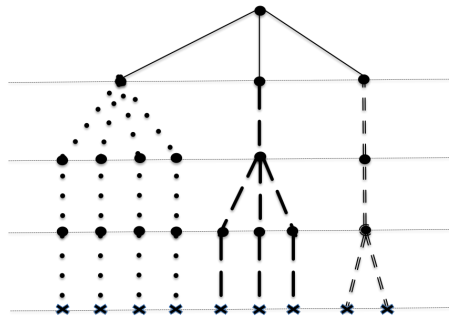


Figura 3.1.3: Modelo com aninhamento em escada (9 tratamentos)

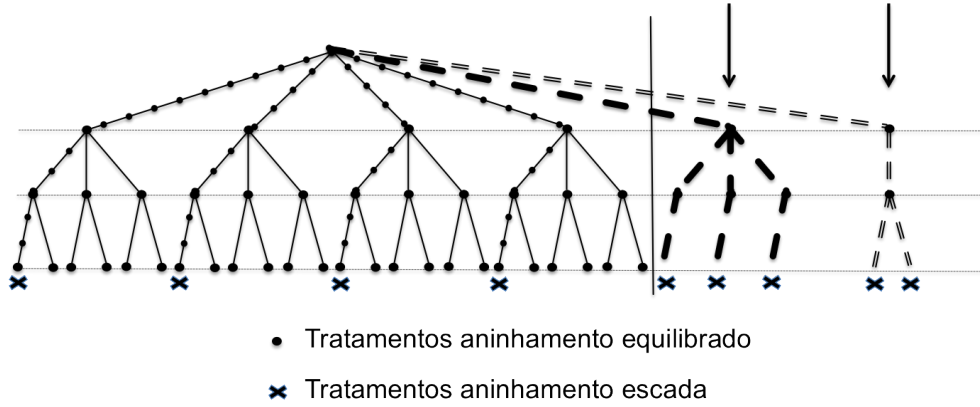


Figura 3.1.4: Modelo com aninhamento em escada (9 tratamentos) versus modelo com aninhamento equilibrado (24 tratamentos)

Relativamente à estrutura algébrica, o aninhamento em escada está associado ao produto cartesiano de álgebras de Jordan comutativas, como iremos ver na secção seguinte. Nessa secção o aninhamento em escada é apresentado na forma usual, ou seja, como um “todo”. Designe-se esse modelo e álgebra correspondente, por aninhamento em escada global e álgebra global, respectivamente.

Embora na literatura existente ser habitual usar o produto cartesiano de álgebras de Jordan para a álgebra global, iremos propor outra abordagem na secção 3.3, deste capítulo. Nessa secção, iremos considerar o aninhamento em escada não como um “todo” mas sim degrau a degrau. Esta abordagem proporciona a possibilidade de “ver” o aninhamento em escada de outra perspectiva. Ao interpretar o modelo degrau a degrau este simplifica-se. Esta simplificação é de interesse no capítulo 4.

3.2 Modelo global

3.2.1 Estrutura Algébrica

O modelo de efeitos aleatórios para o aninhamento em escada é dado por

$$\mathbf{y}_n = \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) \quad (3.2.1)$$

em que as matrizes de incidência, $\mathbf{X}(h)$, do tipo $n \times c(h)$, são matrizes diagonais por blocos dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{X}(0) = D(\mathbf{1}_{a(1)}, \mathbf{1}_{a(2)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}) \\ \mathbf{X}(h) = D(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h)}, \mathbf{1}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}) , \ h = 1, \dots, u-1 \\ \mathbf{X}(u) = D(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(u)}) . \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Admite-se que $\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{1}_u \mu$, com μ representando o valor médio geral e que os vectores dos efeitos, $\boldsymbol{\beta}(h)$, $h = 1, \dots, u$, são aleatórios e independentes com vectores médios nulos e com matrizes de covariância $\sigma^2(h) \mathbf{I}_{c(h)}$, $h = 1, \dots, u$, ou seja,

$$\boldsymbol{\beta}(h) \sim (\mathbf{0}_{c(h)}; \sigma^2(h) \mathbf{I}_{c(h)}) , \ h = 1, \dots, u. \quad (3.2.3)$$

Quando se pretende introduzir réplicas, é usual considerar-se ainda que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}(u) = \mathbf{e} \\ \sigma^2(u) = \sigma^2 \\ \mathbf{X}(u) = \mathbf{I}_n . \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Para o modelo (3.2.1) o vector médio é dado por

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\mu} &= E \left[\sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) \right] \\
 &= \sum_{h=0}^u E [\mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h)] \\
 &= \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) E [\boldsymbol{\beta}(h)] \\
 &= \mathbf{X}(0) \boldsymbol{\beta}(0) \\
 &= \mathbf{1}_n \mu
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

e a matriz de covariância é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \text{COV} \left[\sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) \right] \\
 &= \sum_{h=0}^u \text{COV} [\mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h)] \\
 &= \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \text{COV} [\boldsymbol{\beta}(h)] \mathbf{X}^t(h) \\
 &= \sum_{h=1}^u \sigma^2(h) \mathbf{X}(h) \mathbf{X}^t(h).
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Podemos então escrever $\mathbf{y} \sim (\boldsymbol{\mu}; \mathbf{V})$ em que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}_n \mu \\ \mathbf{V} = \sum_{h=1}^u \sigma^2(h) \mathbf{M}(h) \end{cases}$$

com

$$\mathbf{M}(h) = \mathbf{X}(h) \mathbf{X}^t(h), \quad h = 1, \dots, u. \tag{3.2.7}$$

Seja $\underline{M} = \{\mathbf{M}(h) = \mathbf{X}(h)\mathbf{X}^t(h), h = 1, \dots, u\}$ a família constituída pelas matrizes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(0) = D(\mathbf{J}_{a(1)}, \mathbf{J}_{a(2)}, \dots, \mathbf{J}_{a(u)}) \\ \mathbf{M}(h) = D(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h)}, \mathbf{J}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{J}_{a(u)}), h = 1, \dots, u-1 \\ \mathbf{M}(u) = D(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(u)}). \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

Como para $h \neq h'$

$$\mathbf{M}(h)\mathbf{M}(h') = \mathbf{M}(h')\mathbf{M}(h), h, h' = 1, \dots, u$$

tem-se que as matrizes da família \underline{M} comutam, pelo que $\underline{M} \subset \mathcal{A}(\underline{M})$, sendo $\mathcal{A}(\underline{M})$ a menor álgebra de Jordan comutativa que contém \underline{M} , ver [Fonseca et al., 2003].

O aninhamento em escada está associado à álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\underline{M}) = \bigtimes_{h=1}^u \mathcal{A}(a(h))$, ver proposição 2.5.6, cuja base principal é

$$\underline{Q} = bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_l(h), l = 1, 2, h = 1, \dots, u\} \quad (3.2.9)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_1(h) = D\left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \frac{1}{a(h)}\mathbf{J}_{a(h)}, \mathbf{0}_{a(h+1) \times a(h+1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)}\right), h = 1, \dots, u \\ \mathbf{Q}_2(h) = D\left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \mathbf{K}_{a(h)}, \mathbf{0}_{a(h+1) \times a(h+1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)}\right), h = 1, \dots, u. \end{array} \right. \quad (3.2.10)$$

Escrevendo as matrizes de \underline{M} como combinação linear das matrizes de \underline{Q} obtém-se, para $h = 1, \dots, u-1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(h) &= \sum_{k=1}^h [\mathbf{Q}_1(k) + \mathbf{Q}_2(k)] + \sum_{k=h+1}^u a(k) \mathbf{Q}_1(k) \\
&= \sum_{k=1}^h \mathbf{Q}_1(k) + \sum_{k=h+1}^u a(k) \mathbf{Q}_1(k) + \sum_{k=1}^h \mathbf{Q}_2(k). \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Note-se que

$$\mathbf{M}(u) = \sum_{h=1}^u [\mathbf{Q}_1(h) + \mathbf{Q}_2(h)] = \mathbf{I}_n \tag{3.2.12}$$

pelo que a álgebra $\mathcal{A}(\underline{M})$ é completa.

Tem-se ainda,

$$\underline{Q}^{\frac{1}{2}} = bp^{\frac{1}{2}} \left(\bigtimes_{h=1}^u \mathcal{A}(a(h)) \right) = \{ \mathbf{A}_\ell(h), \ell = 1, 2, h = 1, \dots, u \} \tag{3.2.13}$$

com

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1(h) = \left[\mathbf{0}_{a(1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1)}^t, \frac{1}{\sqrt{a(h)}} \mathbf{1}_{a(h)}^t, \mathbf{0}_{a(h+1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(u)}^t \right] & , \quad h = 1, \dots, u \\ \mathbf{A}_2(h) = \left[\mathbf{0}_{(a(h)-1) \times a(1)}, \dots, \mathbf{T}_{a(h)}, \dots, \mathbf{0}_{(a(h)-1) \times a(u)} \right] & , \quad h = 1, \dots, u. \end{cases} \tag{3.2.14}$$

Note-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1(h)\mathbf{A}_1^t(h) &= \left[\mathbf{0}_{a(1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1)}^t, \frac{1}{\sqrt{a(h)}}\mathbf{1}_{a(h)}^t, \mathbf{0}_{a(h+1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(u)}^t \right] \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{a(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{a(h-1)} \\ \frac{1}{\sqrt{a(h)}}\mathbf{1}_{a(h)} \\ \mathbf{0}_{a(h+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{a(u)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a(h)}}\mathbf{1}_{a(h)}^t \frac{1}{\sqrt{a(h)}}\mathbf{1}_{a(h)} = 1
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2(h)\mathbf{A}_2^t(h) &= \left[\mathbf{0}_{(a(h)-1) \times a(1)}, \dots, \mathbf{T}_{a(h)}, \dots, \mathbf{0}_{(a(h)-1) \times a(u)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{a(1) \times (a(h)-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{a(h-1) \times (a(h)-1)} \\ \mathbf{T}_{a(h)}^t \\ \mathbf{0}_{a(h+1) \times (a(h)-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{a(u) \times (a(h)-1)} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{T}_{a(h)}\mathbf{T}_{a(h)}^t = [\mathbf{T}_{a(h)}]_{(a(h)-1) \times a(h)} [\mathbf{T}_{a(h)}^t]_{a(h) \times (a(h)-1)} \\
&= \mathbf{I}_{a(h)-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Tem-se ainda

$$g_\ell(h) = \text{car}(\mathbf{A}_\ell(h)) = \text{car}(\mathbf{Q}_\ell(h)) = \begin{cases} 1 & , \quad h = 1, \dots, u, \ell = 1 \\ a(h) - 1 & , \quad h = 1, \dots, u, \ell = 2. \end{cases} \tag{3.2.17}$$

Se considerarmos

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}}_1(h) = \frac{1}{a(h)} \mathbf{J}_{a(h)} & , \quad h = 1, \dots, u \\ \dot{\mathbf{A}}_1(h) = \frac{1}{\sqrt{a(h)}} \mathbf{1}_{a(h)}^t & , \quad h = 1, \dots, u \end{cases} \quad (3.2.18)$$

e

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}}_2(h) = \mathbf{K}_{a(h)} & , \quad h = 1, \dots, u \\ \dot{\mathbf{A}}_2(h) = \mathbf{T}_{a(h)} & , \quad h = 1, \dots, u \end{cases} \quad (3.2.19)$$

podemos ainda escrever

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_1(h) = D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_1(h), \mathbf{0}_{a(h+1) \times a(h+1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right), h = 1, \dots, u \\ \mathbf{Q}_2(h) = D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_2(h), \mathbf{0}_{a(h+1) \times a(h+1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right), h = 1, \dots, u. \end{cases} \quad (3.2.20)$$

e

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1(h) = \left[\mathbf{0}_{a(1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1)}^t, \dot{\mathbf{A}}_1(h), \mathbf{0}_{a(h+1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(u)}^t \right] & , \quad h = 1, \dots, u \\ \mathbf{A}_2(h) = \left[\mathbf{0}_{(a(h)-1) \times a(1)}, \dots, \dot{\mathbf{A}}_2(h), \dots, \mathbf{0}_{(a(h)-1) \times a(u)} \right] & , \quad h = 1, \dots, u. \end{cases} \quad (3.2.21)$$

com

$$\begin{cases} \dot{g}_1(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_1(h) \right) = g_1(h) = 1 & , \quad h = 1, \dots, u \\ \dot{g}_2(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_2(h) \right) = g_2(h) = a(h) - 1 & , \quad h = 1 \dots, u. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

Estes resultados serão importantes na secção seguinte.

Retomando (3.2.6) e usando (3.2.11) e (3.2.12) podemos reescrever a matriz \mathbf{V} obtendo

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \sum_{h=1}^u \sigma^2(h) \left(\sum_{k=1}^h [\mathbf{Q}_1(k) + \mathbf{Q}_2(k)] + \sum_{k=h+1}^u a(k) \mathbf{Q}_1(k) \right) \\ &= \sum_{h=1}^u \gamma_1(h) \mathbf{Q}_1(h) + \sum_{h=1}^u \gamma_2(h) \mathbf{Q}_2(h)\end{aligned}\tag{3.2.23}$$

onde as componentes de variância canônicas, $\gamma_\ell(h)$, $\ell = 1, 2$, são dadas por

$$\begin{cases} \gamma_1(h) = \sum_{k=1}^{h-1} a(k) \sigma^2(k) + \sum_{k=h}^u \sigma^2(k) & , \quad h = 1 \dots, u \\ \gamma_2(h) = \sum_{k=h}^u \sigma^2(k) & , \quad h = 1 \dots, u. \end{cases}\tag{3.2.24}$$

Obtém-se então

$$\mathbf{V} = \sum_{h=1}^u \sigma^2(h) \mathbf{M}(h) = \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 \gamma_\ell(h) \mathbf{Q}_\ell(h).\tag{3.2.25}$$

Seja agora \mathbf{B} a matriz de transição $\underline{M} \setminus \underline{Q}$. Por (3.2.11) tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= [\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_2] \\ &= \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & a(2) & \cdots & a(k) & a(k+1) & \cdots & a(u) & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a(k+1) & \cdots & a(u) & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{array} \right].\end{aligned}\tag{3.2.26}$$

Considerando agora

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1(1) & \cdots & \gamma_1(u) & \gamma_2(1) & \cdots & \gamma_2(u) \end{bmatrix}^t \\ \boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \sigma^2(1) & \cdots & \sigma^2(u) \end{bmatrix}^t \end{cases} \quad (3.2.27)$$

tem-se

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^2. \quad (3.2.28)$$

Além disso, se considerarmos ainda

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}^t \\ \gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1(1) & \cdots & \gamma_1(u) \end{bmatrix}^t \\ \gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_2(1) & \cdots & \gamma_2(u) \end{bmatrix}^t, \end{cases} \quad (3.2.29)$$

então

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \mathbf{B}_1^t \boldsymbol{\sigma}^2 \\ \gamma_2 = \mathbf{B}_2^t \boldsymbol{\sigma}^2. \end{cases} \quad (3.2.30)$$

Como \mathbf{B}_2 é horizontalmente livre, sendo os seus vectores linha linearmente independentes, os vectores coluna de \mathbf{B}_2^t também o são e então

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \mathbf{B}_1^t (\mathbf{B}_2^t)^{-1} \gamma_2 \\ \boldsymbol{\sigma}^2 = (\mathbf{B}_2^t)^{-1} \gamma_2. \end{cases} \quad (3.2.31)$$

Uma vez que

$$(\mathbf{B}_2^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.32)$$

então resolvendo a 2ª equação de (3.2.31) obtém-se

$$\begin{cases} \sigma^2(h) = \gamma_2(h) - \gamma_2(h+1), \quad h = 1, \dots, u-1 \\ \sigma^2(u) = \gamma_2(u). \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Assim, estimando $\gamma_2(h)$, $h = 1, \dots, u$, conseguimos também estimar $\sigma^2(h)$, $h = 1, \dots, u$.

3.2.2 Estimação

Vamos agora ver como estimar as componentes de variância canônicas $\gamma_2(h)$, $h = 1, \dots, u$.

Comecemos por considerar

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\ell(h) = \mathbf{A}_\ell(h)\mathbf{y}, \quad \ell = 1, 2, \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.2.34)$$

Como

$$E[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\ell(h)] = E[\mathbf{A}_\ell(h)\mathbf{y}] = \mathbf{A}_\ell(h)E[\mathbf{y}] = \mathbf{A}_\ell(h)\boldsymbol{\mu} \quad (3.2.35)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{COV} [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\ell(h)] &= \mathbf{COV} [\mathbf{A}_\ell(h)\mathbf{y}] = \mathbf{A}_\ell(h)\mathbf{COV} [\mathbf{y}] \mathbf{A}_\ell^t(h) \\
&= \mathbf{A}_\ell(h) \left(\sum_{j=1}^u \sum_{i=1}^2 \gamma_i(j) \mathbf{A}_i^t(j) \mathbf{A}_i(j) \right) \mathbf{A}_\ell^t(h) \\
&= \gamma_\ell(h) \mathbf{A}_\ell(h) \mathbf{A}_\ell^t(h) \mathbf{A}_\ell(h) \mathbf{A}_\ell^t(h) \\
&= \gamma_\ell(h) \mathbf{I}_{g_\ell(h)},
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

podemos escrever

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\ell(h) \sim (\boldsymbol{\eta}_\ell(h); \gamma_\ell(h) \mathbf{I}_{g_\ell(h)}) , \ell = 1, 2 , h = 1, \dots , u, \tag{3.2.37}$$

com

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_\ell(h) = \mathbf{A}_\ell(h) \boldsymbol{\mu} & , \ell = 1, 2 , h = 1, \dots , u \\ g_\ell(h) = \text{car}(\mathbf{A}_\ell(h)) & , \ell = 1, 2 , h = 1, \dots , u. \end{cases} \tag{3.2.38}$$

Tem-se ainda que

$$E [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)] = \mathbf{A}_2(h) E [\mathbf{y}] = \mathbf{A}_2(h) \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_{g_2(h)} , h = 1, \dots , u. \tag{3.2.39}$$

Usando (3.2.39) podemos escrever ainda

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h) \sim (\mathbf{0}_{g_2(h)}; \gamma_2(h) \mathbf{I}_{g_2(h)}) , h = 1, \dots , u. \tag{3.2.40}$$

Além disso, os vectores $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)$ são tais que para $h \neq h'$, $h, h' = 1, \dots , u$, se tem que

$$\begin{aligned}
\mathbf{COV} [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h); \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h')] &= \mathbf{COV} [\mathbf{A}_2(h)\mathbf{y}; \mathbf{A}_2(h')\mathbf{y}] = \\
&= \mathbf{A}_2(h) \left(\sum_{j=1}^u \sum_{i=1}^2 \gamma_i(j) \mathbf{A}_i^t(j) \mathbf{A}_i(j) \right) \mathbf{A}_2^t(h') \\
&= (\gamma_2(h) \mathbf{A}_2(h) \mathbf{A}_2^t(h) \mathbf{A}_2(h)) \mathbf{A}_2^t(h') \\
&= \mathbf{0}_{g_2(h) \times g_2(h')}.
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbf{COV} [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)] &= E [(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h) - E(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h))) (\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h) - E(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)))^t] \\ &= E [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h)],\end{aligned}\tag{3.2.42}$$

usando (3.2.40) tem-se

$$E [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h)] = \gamma_2(h) \mathbf{I}_{g_2(h)}, \quad h = 1, \dots, u.$$

Sendo

$$S(h) = \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)\|^2 = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h), \quad h = 1, \dots, u,\tag{3.2.43}$$

então

$$\begin{aligned}E[S(h)] &= E[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)] = \text{tr}(E[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)]) = E(\text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)]) \\ &= E(\text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h)]) = \text{tr}(E[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_2^t(h)]) = \text{tr}(\mathbf{COV}[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_2(h)]) \\ &= \text{tr}(\gamma_2(h) \mathbf{I}_{g_2(h)}) = \gamma_2(h) g_2(h).\end{aligned}\tag{3.2.44}$$

Como

$$E[S(h)] = \gamma_2(h) g_2(h), \quad h = 1, \dots, u\tag{3.2.45}$$

então

$$\tilde{\gamma}_2(h) = \frac{\|\mathbf{A}_2(u) \mathbf{y}\|^2}{g_2(h)}, \quad h = 1, \dots, u\tag{3.2.46}$$

é um estimador centrado para $\gamma_2(h)$, $h = 1, \dots, u$.

Assim, por (3.2.33), obtêm-se os estimadores para as componentes de variância iniciais

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^2(h) = \tilde{\gamma}_2(h) - \tilde{\gamma}_2(h+1), & h = 1, \dots, u-1 \\ \tilde{\sigma}^2(u) = \tilde{\gamma}_2(u). \end{cases} \quad (3.2.47)$$

Pode acontecer a estimação anterior originar valores negativos para as componentes de variância. Esta possibilidade já foi estudada por vários autores, veja-se por exemplo [Nelder, 1954]. Caso $\tilde{\sigma}^2(h) < 0$, $h = 1, \dots, u$, assume-se que $\tilde{\sigma}^2(h)$ será muito pequena ou mesmo nula.

3.2.3 Normalidade

Nesta secção vamos assumir que o modelo tem distribuição normal. Considerem-se então os vectores $\beta(h)$, $h = 1, \dots, u$, independentes e tais que

$$\beta(h) \sim N(\mathbf{0}_{c(h)}; \sigma^2(h)\mathbf{I}_{c(h)}), \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.2.48)$$

Com base no pressuposto anterior tem-se $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{V})$ com

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}_n \mu \\ \mathbf{V} = \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 \gamma_\ell(h) \mathbf{Q}_\ell(h) \end{cases} \quad (3.2.49)$$

e ainda

$$\tilde{\eta}_2(h) \sim N(\mathbf{0}_{g_2(h)}; \gamma_2(h)\mathbf{I}_{g_2(h)}), \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.2.50)$$

Por outro lado, como $\mathcal{A} = \bigtimes_{h=1}^u \mathcal{A}(a(h))$ é completa, ver (3.2.12), então

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{-1} = \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 (\gamma_\ell(h))^{-1} \mathbf{Q}_\ell(h) \\ |\mathbf{V}| = \prod_{h=1}^u \prod_{\ell=1}^2 (\gamma_\ell(h))^{g_\ell(h)}. \end{cases} \quad (3.2.51)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 \frac{(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{A}_\ell^t(h) \mathbf{A}_\ell(h) (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})}{\gamma_\ell(h)} \\
&= \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 \frac{(\mathbf{A}_\ell(h) (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}))^t \mathbf{A}_\ell(h) (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})}{\gamma_\ell(h)} \\
&= \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 \frac{\|(\mathbf{A}_\ell(h) (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}))\|^2}{\gamma_\ell(h)} \\
&= \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 \frac{\|\mathbf{A}_\ell(h) \mathbf{y} - \mathbf{A}_\ell(h) \boldsymbol{\mu}\|^2}{\gamma_\ell(h)} \\
&= \sum_{h=1}^u \sum_{\ell=1}^2 \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\ell(h) - \boldsymbol{\eta}_\ell(h)\|^2}{\gamma_\ell(h)} \\
&= \sum_{h=1}^u \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) - \boldsymbol{\eta}_1(h)\|^2}{\gamma_1(h)} + \sum_{h=1}^u \frac{S(h)}{\gamma_2(h)}.
\end{aligned} \tag{3.2.52}$$

Como

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) - \boldsymbol{\eta}_1(h)\|^2 &= [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) - \boldsymbol{\eta}_1(h)]^t [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) - \boldsymbol{\eta}_1(h)] \\
&= \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2 - [\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h)]^t \boldsymbol{\eta}_1(h) - [\boldsymbol{\eta}_1(h)]^t \tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) + \|\boldsymbol{\eta}_1(h)\|^2 \\
&= \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2 - 2 [\boldsymbol{\eta}_1(h)]^t \tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) + \|\boldsymbol{\eta}_1(h)\|^2,
\end{aligned} \tag{3.2.53}$$

então

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{h=1}^u [\gamma_1(h)]^{-1} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2 - 2 \sum_{h=1}^u [\gamma_1(h)]^{-1} [\boldsymbol{\eta}_1(h)]^t \tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) + \\
&+ \sum_{h=1}^u [\gamma_1(h)]^{-1} \|\boldsymbol{\eta}_1(h)\|^2 + \sum_{h=1}^u [\gamma_2(h)]^{-1} S(h).
\end{aligned} \tag{3.2.54}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}[\sum_{h=1}^u [\gamma_1(h)]^{-1} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2 - 2 \sum_{h=1}^u [\gamma_1(h)]^{-1} [\boldsymbol{\eta}_1(h)]^t \tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) + \sum_{h=1}^u [\gamma_1(h)]^{-1} \|\boldsymbol{\eta}_1(h)\|^2]}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{h=1}^u \prod_{\ell=1}^2 [\gamma_\ell(h)]^{\frac{g_\ell(h)}{2}}} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}[\sum_{h=1}^u [\gamma_2(h)]^{-1} S(h)]} \\
&= e^{\sum_{h=1}^u [-2\gamma_1(h)]^{-1} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2 + \sum_{h=1}^u [\gamma_1(h)]^{-1} [\boldsymbol{\eta}_1(h)]^t \tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(h) + \sum_{h=1}^u [-2\gamma_2(h)]^{-1} S(h)} \times \\
&\times \frac{e^{\sum_{h=1}^u [-2\gamma_1(h)]^{-1} \|\boldsymbol{\eta}_1(h)\|^2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{h=1}^u \prod_{\ell=1}^2 [\gamma_\ell(h)]^{\frac{g_\ell(h)}{2}}}
\end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Aplicando o teorema da factorização, teorema (2.6.1), tem-se que

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}) = (\|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(1)\|^2, \dots, \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(u)\|^2, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(1), \dots, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_1(u), S(1), \dots, S(u))$$

é uma estatística suficiente para o parâmetro

$$\boldsymbol{\theta} = (\gamma_1(1), \dots, \gamma_1(u), \boldsymbol{\eta}_1(1), \dots, \boldsymbol{\eta}_1(u), \gamma_2(1), \dots, \gamma_2(u)).$$

De acordo com o teorema de Rao-Blackwell, teorema (2.6.2), os estimadores $\tilde{\sigma}^2(h)$ e $\tilde{\gamma}_2(h)$, $h = 1, \dots, u$ são funções de estatísticas suficientes.

Em cada um dos h degraus, $h = 1, \dots, u$, tem-se que $\mu(1) = \dots = \mu(u) = \mu$ pelo que o espaço paramétrico não é aberto, não sendo possível, ver proposição (2.6.1), deduzir que a estatística anterior é completa.

A existência de estimadores UMVUE é pois um problema em aberto para os modelos com aninhamento em escada.

Inferência para $\gamma_2(h)$

Os vectores $\tilde{\eta}_2(h)$, $h = 1, \dots, u$, são independentes pois a sua função distribuição conjunta é normal e as matrizes de covariância cruzadas são nulas. Então as somas de quadrados $S(h)$, $h = 1, \dots, u$, também são independentes. Usando (3.2.17) e (3.2.50) podemos escrever

$$\tilde{\eta}_2(h) \sim N(\mathbf{0}_{a(h)-1}; \gamma_2(h)\mathbf{I}_{a(h)-1}), \quad h = 1, \dots, u \quad (3.2.56)$$

pelo que

$$S(h) = \|\tilde{\eta}_2(h)\|^2 \sim \gamma_2(h)\chi_{a(h)-1}^2, \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.2.57)$$

Tem-se então que os intervalos de confiança para $\gamma_2(h)$ de nível $1 - q$ são dados por

1. $\left[\frac{S(h)}{x_{1-\frac{q}{2}, a(h)-1}}; \frac{S(h)}{x_{\frac{q}{2}, a(h)-1}} \right]$, no caso bilateral
2. $\left[0; \frac{S(h)}{x_{q, a(h)-1}} \right]$, no caso unilateral esquerdo
3. $\left[\frac{S(h)}{x_{1-q, a(h)-1}}; +\infty \right]$, no caso unilateral direito

em que $x_{p,g}$ representa o quantil de probabilidade p para χ_g^2 . Utilizando os intervalos anteriores podemos testar, por dualidade, para um nível q , as hipóteses

$$H_{0,h} : \gamma_2(h) = \gamma_{2,0}(h), \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.2.58)$$

Esta hipótese é rejeitada quando $\gamma_{2,0}(h)$, $h = 1, \dots, u$, não pertence ao intervalo de confiança bilateral [unilateral esquerdo, unilateral direito] de nível $1 - q$.

Inferência para $\frac{\gamma_2(h)}{\gamma_2(h+1)}$

Como os $S(h)$, $h = 1, \dots, u - 1$, são independentes e

$$S(h) \sim \gamma_2(h) \chi_{a(h)-1}^2, \quad h = 1, \dots, u - 1 \quad (3.2.59)$$

podemos escrever

$$F_{h,h+1} = \frac{(a(h+1) - 1)S(h)}{(a(h) - 1)S(h+1)} \sim \frac{\gamma_2(h)}{\gamma_2(h+1)} \mathcal{F}_{a(h)-1, a(h+1)-1}, \quad h = 1, \dots, u - 1. \quad (3.2.60)$$

Então os intervalos de confiança para $\frac{\gamma_2(h)}{\gamma_2(h+1)}$, $h = 1, \dots, u - 1$, de nível $1 - q$ são dados por

1. $\left[\frac{F_{h,h+1}}{f_{1-\frac{q}{2}, a(h)-1, a(h+1)-1}}; \frac{F_{h,h+1}}{f_{\frac{q}{2}, a(h)-1, a(h+1)-1}} \right]$, no caso bilateral
2. $\left[0; \frac{F_{h,h+1}}{f_{q, a(h)-1, a(h+1)-1}} \right]$, no caso unilateral esquerdo
3. $\left[\frac{F_{h,h+1}}{f_{1-q, a(h)-1, a(h+1)-1}}, +\infty \right]$, no caso direito

em que $f_{p,g,g'}$ representa o quantil de probabilidade p para $\mathcal{F}_{g,g'}$. Considere-se agora que

$$\gamma_2(h; h+1) = \frac{\gamma_2(h)}{\gamma_2(h+1)}, \quad h = 1, \dots, u - 1. \quad (3.2.61)$$

Utilizando os intervalos anteriores podemos testar, por dualidade, para um nível q , as hipóteses

$$H_{0,h} : \frac{\gamma_2(h)}{\gamma_2(h+1)} = \gamma_{2;0}(h; h+1), \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.2.62)$$

Esta hipótese é rejeitada quando $\gamma_{2;0}(h; h+1)$, $h = 1, \dots, u$ não pertence ao intervalo de confiança bilateral [unilateral esquerdo, unilateral direito] de nível $1 - q$.

Neste modelo, as hipóteses de interesse serão

$$H_0(h) : \sigma^2(h) = 0 \quad H_1(h) : \sigma^2(h) > 0, \quad h = 1, \dots, u-1. \quad (3.2.63)$$

Se para o factor h , $h = 1, \dots, u-1$, rejeitarmos $H_0(h)$ então é porque existe evidência estatística para considerar que o factor h , $h = 1, \dots, u-1$, é significativo.

Uma vez que

$$\begin{cases} \sigma^2(h) = \gamma_2(h) - \gamma_2(h+1), & h = 1, \dots, u-1 \\ \sigma^2(u) = \gamma_2(u), \end{cases} \quad (3.2.64)$$

as hipóteses anteriores também se podem escrever como

$$H_0(h) : \gamma_2(h) = 0 \quad H_1(h) : \gamma_2(h) > 0, \quad h = 1, \dots, u-1 \quad (3.2.65)$$

ou ainda

$$H_0(h) : \frac{\gamma_2(h)}{\gamma_2(h+1)} = 1 \quad H_1(h) : \frac{\gamma_2(h)}{\gamma_2(h+1)} > 1, \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.2.66)$$

Quaisquer destes dois testes estão incluídos nos testes inicialmente apresentados.

3.3 Modelo degrau a degrau

3.3.1 Estrutura Algébrica

O objectivo desta secção é introduzir o aninhamento em escada não como um “todo”, mas numa perspectiva de degrau a degrau.

De forma a apresentarmos o aninhamento em escada degrau a degrau, comecemos por considerar que o modelo (3.2.1) vai ser fraccionado da seguinte forma

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^t(1) & \cdots & \mathbf{y}^t(u) \end{bmatrix}^t \quad (3.3.1)$$

em que $\mathbf{y}(h)$ representa o submodelo no degrau h , $h = 1, \dots, u$. A ideia é decompor o modelo inicial em submodelos, um por cada degrau.

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(h)\boldsymbol{\beta}(h) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{a(1)} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{I}_{a(h-1)} & & & \\ & & & \mathbf{I}_{a(h)} & & \\ & & & & \mathbf{1}_{a(h+1)} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mathbf{1}_{a(u)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1(h) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{h-1}(h) \\ \boldsymbol{\beta}_h(h) \\ \beta_{h+1}(h) \\ \vdots \\ \beta_u(h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1(h) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{h-1}(h) \\ \boldsymbol{\beta}_h(h) \\ \beta_{h+1}(h)\mathbf{1}_{a(h+1)} \\ \vdots \\ \beta_u(h)\mathbf{1}_{a(u)} \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

então

$$\mathbf{y} = \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) = \begin{bmatrix} \beta_1(0) \mathbf{1}_{a(1)} + \sum_{\ell=1}^u \beta_1(\ell) \\ \beta_2(0) \mathbf{1}_{a(2)} + \beta_2(1) \mathbf{1}_{a(2)} + \sum_{\ell=2}^u \beta_2(\ell) \\ \vdots \\ \beta_k(0) \mathbf{1}_{a(k)} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \beta_k(\ell) \mathbf{1}_{a(k)} + \sum_{\ell=k}^u \beta_k(\ell) \\ \vdots \\ \beta_u(0) \mathbf{1}_{a(u)} + \sum_{\ell=1}^{u-1} \beta_u(\ell) \mathbf{1}_{a(u)} + \beta_u(u) \end{bmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Passamos a ter em cada um dos h degraus, $h = 1, \dots, u$, um submodelo dado por

$$\mathbf{y}(h) = \sum_{\ell=0}^{h-1} \beta_h(\ell) \mathbf{1}_{a(h)} + \sum_{\ell=h}^u \mathbf{I}_{a(h)} \boldsymbol{\beta}_h(\ell), \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.3.4)$$

Assume-se que $\beta_h(0)$, $h = 1, \dots, u$, são fixos e os restantes subvectores são independentes com

$$\begin{cases} \beta_h(\ell) \sim (0; \sigma^2(\ell)) & , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad \ell = 1, \dots, h-1 \\ \boldsymbol{\beta}_h(\ell) \sim (\mathbf{0}_{a(h)}; \sigma^2(\ell) \mathbf{I}_{a(h)}) & , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad \ell = h, \dots, u. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Em vez de um único modelo com u factores podemos considerar que passamos a ter u submodelos, em que cada submodelo tem um factor.

Assim, para o h -ésimo submodelo, $h = 1, \dots, u$, podemos considerar $\dot{\mathbf{X}}_1(h) = \mathbf{1}_{a(h)}$ e $\dot{\mathbf{X}}_2(h) = \mathbf{I}_{a(h)}$, sendo que as matrizes $\dot{\mathbf{M}}_1(h) = \mathbf{J}_{a(h)}$ e $\dot{\mathbf{M}}_2(h) = \mathbf{I}_{a(h)}$ comutam. As matrizes $\dot{\mathbf{M}}_1(h)$ e $\dot{\mathbf{M}}_2(h)$ pertencem então à álgebra de Jordan comutativa com base principal

$$bp \left(\dot{\mathcal{A}}(a(h)) \right) = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_1(h), \dot{\mathbf{Q}}_2(h) \right\} = \left\{ \frac{1}{a(h)} \mathbf{J}_{a(h)}, \mathbf{K}_{a(h)} \right\}, \quad (3.3.6)$$

que além de ser completa é também regular. Tem-se ainda

$$bp^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\mathcal{A}}(a(h)) \right) = \{ \dot{\mathbf{A}}_1(h), \dot{\mathbf{A}}_2(h) \} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a(h)}} \mathbf{1}_{a(h)}^t, \mathbf{T}_{a(h)} \right\}. \quad (3.3.7)$$

Note-se que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}}_1(h) \dot{\mathbf{A}}_1^t(h) = 1 & , \quad h = 1, \dots, u \\ \dot{\mathbf{A}}_2(h) \dot{\mathbf{A}}_2^t(h) = \mathbf{I}_{a(h)-1} & , \quad h = 1, \dots, u. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Tem-se ainda

$$\begin{cases} \dot{g}_1(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{Q}}_1(h) \right) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_1(h) \right) = 1 & , \quad h = 1, \dots, u \\ \dot{g}_2(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{Q}}_2(h) \right) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_2(h) \right) = a(h) - 1 & , \quad h = 1, \dots, u. \end{cases}$$

Com base no que foi exposto anteriormente vem que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(h) &= \mathbf{COV} [\mathbf{y}(h)] \\ &= \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) \mathbf{J}_{a(h)} + \sum_{\ell=h}^u \sigma^2(\ell) \mathbf{I}_{a(h)} \\ &= \alpha_1(h) \dot{\mathbf{Q}}_1(h) + \alpha_2(h) \dot{\mathbf{Q}}_2(h) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

com as componentes de variância canônicas

$$\begin{cases} \alpha_1(h) = a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) + \sum_{\ell=h}^u \sigma^2(\ell) \\ \alpha_2(h) = \sum_{\ell=h}^u \sigma^2(\ell). \end{cases} \quad (3.3.10)$$

Tem-se então que

$$\begin{cases} \sigma^2(h) = \alpha_2(h) - \alpha_2(h+1), \quad h = 1, \dots, u-1 \\ \sigma^2(u) = \alpha_2(u), \end{cases} \quad (3.3.11)$$

pelo que a relação entre as componentes de variância iniciais e as canônicas, é a mesma que no modelo global, ou seja, que em (3.2.33).

3.3.2 Estimação

Vejamos agora que apesar da abordagem ser diferente, obtemos os mesmos estimadores para as componentes de variância canônicas que em (3.2.46).

Uma vez que

$$\mathbf{y}(h) \sim (\mathbf{1}_{a(h)}\mu; \mathbf{V}(h)), \quad h = 1, \dots, u \quad (3.3.12)$$

podemos escrever

$$\dot{\mathbf{A}}_2(h)\mathbf{y}(h) \sim \left(\dot{\mathbf{A}}_2(h)\boldsymbol{\mu}_{a(h)}; \alpha_2(h)\mathbf{I}_{\dot{g}_2(h)} \right), \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.3.13)$$

Como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}}_2(h)\boldsymbol{\mu}_{a(h)} = \mathbf{0}_{\dot{g}_2(h)} & , \quad h = 1, \dots, u \\ \dot{g}_2(h) = g_2(h) & , \quad h = 1, \dots, u, \end{cases} \quad (3.3.14)$$

podemos ainda escrever

$$\dot{\mathbf{A}}_2(h)\mathbf{y}(h) \sim (\mathbf{0}_{g_2(h)}; \alpha_2(h)\mathbf{I}_{g_2(h)}), \quad h = 1, \dots, u. \quad (3.3.15)$$

Utilizando o mesmo procedimento, que permitiu encontrar (3.2.46), obtêm-se os estimadores centrados

$$\tilde{\alpha}_2(h) = \frac{\|\dot{\mathbf{A}}_2(h)\mathbf{y}(h)\|^2}{g_2(h)}, \quad h = 1, \dots, u \quad (3.3.16)$$

para as componentes de variância canônicas.

Uma vez que

$$\dot{\mathbf{A}}_2(h)\mathbf{y}(h) = \mathbf{A}_2(h)\mathbf{y}, \quad h = 1, \dots, u \quad (3.3.17)$$

chegamos à conclusão pretendida.

Como se obtiveram os mesmo estimadores que na secção anterior, os resultados sobre inferência atrás apresentados continuam a ser aplicáveis.

Capítulo 4

Aninhamento em Escada Estruturado

4.1 Introdução

O objectivo deste capítulo é apresentar a teoria dos modelos com aninhamento em escada estruturado.

No aninhamento em escada, apresentado no capítulo anterior, cada degrau corresponde a um factor do modelo. É possível que um degrau corresponda a mais do que um factor? Sim, os modelos com aninhamento em escada estruturado permitem tornar esta possibilidade numa realidade.

A cada degrau podemos associar um submodelo com estrutura ortogonal, obtendo assim um modelo com aninhamento em escada estruturado, ver figura 4.1.1.

O aninhamento em escada estruturado permite a construção de modelos mais complexos, uma vez que nos dá a possibilidade de aumentar o número de factores analisados, para um mesmo número de tratamentos. O número de factores analisados deixa de ser o número de degraus do modelo, passando a ser a soma do número de factores dos vários degraus.

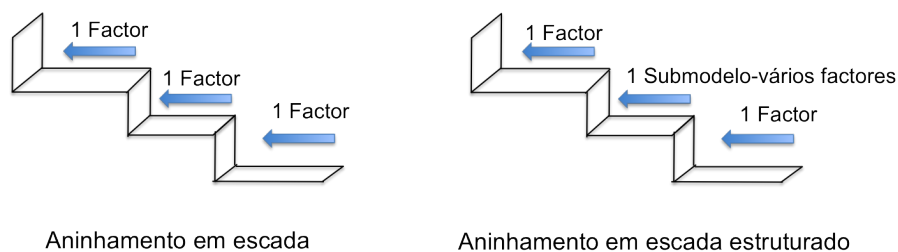


Figura 4.1.1: Modelo com aninhamento em escada versus modelo com aninhamento estruturado

O exemplo da figura 4.1.2 apresenta a estrutura de um aninhamento em escada com

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 3 \text{ factores ou degraus} \\ a(1) = 3 \text{ níveis activos para o 1º factor} \\ a(2) = 2 \text{ níveis activos para o 2º factor} \\ a(3) = 4 \text{ níveis activos para o 3º factor.} \end{array} \right.$$

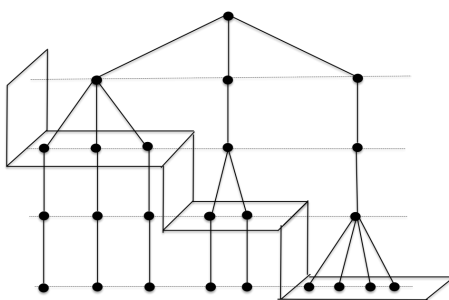


Figura 4.1.2: Modelo com aninhamento em escada

Na figura 4.1.3 apresenta-se uma possibilidade para o aninhamento em escada estruturado, que com o mesmo número de tratamentos permite analisar mais um factor. O último factor, que tem 4 níveis, é substituído por dois factores, cada um com dois níveis que se cruzam.

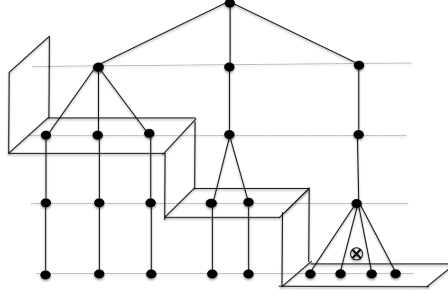


Figura 4.1.3: Modelo com aninhamento em escada estruturado

Tal como a estrutura algébrica dos modelos com aninhamento em escada, também a estrutura algébrica dos modelos com aninhamento em escada estruturado assenta em álgebras de Jordan comutativas. No modelo com aninhamento em escada, associada ao i -ésimo factor temos a álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(a(i))$. As matrizes que constituem esta álgebra são

$$\begin{cases} \frac{1}{a(i)} \mathbf{J}_{a(i)} = \frac{1}{a(i)} \mathbf{1}_{a(i)} \mathbf{1}_{a(i)}^t & , \quad i = 1, \dots, u \\ \mathbf{K}_{a(i)} = \mathbf{I}_{a(i)} - \frac{1}{a(i)} \mathbf{J}_{a(i)} & , \quad i = 1, \dots, u. \end{cases}$$

O aninhamento em escada estruturado proporciona, a interessante possibilidade de substituir $\mathcal{A}(a(i))$, $i = 1, \dots, u$, por outra álgebra considerando uma outra estrutura para os submodelos associados aos degraus.

No exemplo da figura 4.1.3 substituímos a álgebra de Jordan comutativa $\mathcal{A}(a(3))$, antes associada ao 3º degrau, pela álgebra de Jordan comutativa com base principal constituída pelas matrizes

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \\ \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2. \end{cases}$$

Com a possibilidade de introduzir em cada degrau um novo submodelo, este novo tipo de modelo torna-se bastante mais geral do que o anterior, que apenas permite um factor por degrau. Desta generalização resulta, naturalmente, uma estrutura algébrica com um nível de complexidade mais elevado. Uma nova abordagem relativa à utilização do vector das observações, não como habitualmente, mas dividido em subvectores, fez com que o modelo se tornasse mais “manejável”. Como este modelo é bastante geral, na subsecção 4.2.4, apresenta-se um exemplo de aplicação de um modelo com aninhamento em escada estruturado. O exemplo que iremos utilizar é o apresentado na figura 4.1.3. Neste exemplo, existem 3 degraus e num deles tem-se um submodelo com cruzamento de factores. É nosso objectivo que este exemplo possa testemunhar que o aninhamento em escada estruturado, apesar de muito mais geral, pode ser utilizado com a mesma “simplicidade” que o aninhamento em escada tradicional. Assim, o aninhamento em escada estruturado pode ser uma boa alternativa face aos restantes aninhamentos.

4.2 Modelo Degrau a Degrau

4.2.1 Estrutura Algébrica

Seguindo [Monteiro et al., 2013], seja u o número de degraus, $a(h)$ o número de níveis activos, ou ramificações, no h -ésimo degrau e $n = \sum_{h=1}^u a(h)$ o número de tratamentos total. Seja ainda $w(h)$ o número de matrizes de incidência do h -ésimo degrau.

O modelo de efeitos aleatórios com aninhamento em escada estruturado é

$$\mathbf{y} = \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h)\boldsymbol{\beta}(h), \quad (4.2.1)$$

com as matrizes de incidência $\mathbf{X}(h)$, $h = 0, \dots, u$, definidas por

$$\begin{cases} \mathbf{X}(0) = D(\mathbf{1}_{a(1)}, \mathbf{1}_{a(2)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}) \\ \mathbf{X}(h) = D\left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \left[\dot{\mathbf{X}}_1(h), \dots, \dot{\mathbf{X}}_{w(h)}(h)\right], \mathbf{1}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}\right) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

e vectores dos efeitos $\boldsymbol{\beta}(h)$, $h = 0, \dots, u$, dados por

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}(0) = [\beta_1(0), \dots, \beta_u(0)]^t \\ \boldsymbol{\beta}(h) = \left[\boldsymbol{\beta}_1^t(h), \dots, \boldsymbol{\beta}_{h-1}^t(h), \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_1^t(h), \dots, \dot{\boldsymbol{\beta}}_{w(h)}^t(h)\right]^t, \beta_{h+1}(h), \dots, \beta_u(h)\right]^t. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

As matrizes

$$\dot{\mathbf{X}}_i(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad i = 1, \dots, w(h)$$

são do tipo $a(h) \times c_i(h)$ e representam as matrizes de incidência do submodelo que está no h -ésimo degrau, com

$$c_i(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad i = 1, \dots, w(h)$$

o número de níveis do i -ésimo factor do h -ésimo degrau.

Admite-se que $\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{1}_u \mu$, com μ representando o valor médio geral e que os vectores dos efeitos, $\boldsymbol{\beta}(h)$, $h = 1, \dots, u$, são aleatórios e independentes tais que

$$\boldsymbol{\beta}(h) \sim (\mathbf{0}_{c(h)}; \sigma^2(h) \mathbf{I}_{c(h)}) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad (4.2.4)$$

onde

$$c(h) = \sum_{l=1}^{h-1} a(l) + \sum_{i=1}^{w(h)} c_i(h) + u - h, \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.2.5)$$

Os subvectores

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_i(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad i = 1, \dots, w(h), \quad (4.2.6)$$

são aleatórios e representam os efeitos do submodelo que está no h -ésimo degrau.

O vector médio para o modelo (4.2.1) é $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}_n \mu$ e a matriz de covariância é dada por $\mathbf{V} = D(\mathbf{V}(1), \dots, \mathbf{V}(u))$, com $\mathbf{V}(h)$, $h = 1, \dots, u$, matriz de covariância para cada um dos submodelos correspondentes aos degraus.

Como o vector

$$\mathbf{X}(h)\boldsymbol{\beta}(h) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{a(1)} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \mathbf{I}_{a(h-1)} & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_1(h), \dots, \dot{\mathbf{X}}_{w(h)}(h) \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & \mathbf{1}_{a(h+1)} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \mathbf{1}_{a(u)} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1(h) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{h-1}(h) \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_1(h) \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_{w(h)}(h) \\ \boldsymbol{\beta}_{h+1}(h) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_u(h) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1(h) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{h-1}(h) \\ \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\mathbf{X}}_j(h) \dot{\boldsymbol{\beta}}_j(h) \\ \boldsymbol{\beta}_{h+1}(h) \mathbf{1}_{a(h+1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_u(h) \mathbf{1}_{a(u)} \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u \quad (4.2.7)$$

então o modelo (4.2.1) vem

$$\mathbf{y} = \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) = \begin{bmatrix} \beta_1(0) \mathbf{1}_{a(1)} + \sum_{j=1}^{w(1)} \dot{\mathbf{X}}_j(1) \dot{\boldsymbol{\beta}}_j(1) + \sum_{\ell=2}^u \boldsymbol{\beta}_1(\ell) \\ \beta_2(0) \mathbf{1}_{a(2)} + \beta_2(1) \mathbf{1}_{a(2)} + \sum_{j=1}^{w(2)} \dot{\mathbf{X}}_j(2) \dot{\boldsymbol{\beta}}_j(2) + \sum_{\ell=3}^u \boldsymbol{\beta}_2(\ell) \\ \vdots \\ \beta_k(0) \mathbf{1}_{a(k)} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \beta_k(\ell) \mathbf{1}_{a(k)} + \sum_{j=1}^{w(k)} \dot{\mathbf{X}}_j(k) \dot{\boldsymbol{\beta}}_j(k) + \sum_{\ell=k+1}^u \boldsymbol{\beta}_k(\ell) \\ \vdots \\ \beta_u(0) \mathbf{1}_{a(u)} + \sum_{\ell=1}^{u-1} \beta_u(\ell) \mathbf{1}_{a(u)} + \sum_{j=1}^{w(u)} \dot{\mathbf{X}}_j(u) \dot{\boldsymbol{\beta}}_j(u) \end{bmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Considerando subvectores, o modelo (4.2.1) pode ser escrito da forma seguinte

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(u) \end{bmatrix}, \quad (4.2.9)$$

em que cada subvector

$$\mathbf{y}(h) = \beta_h(0) \mathbf{1}_{a(h)} + \sum_{\ell=h}^{h-1} \beta_h(\ell) \mathbf{1}_{a(h)} + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\mathbf{X}}_j(h) \dot{\boldsymbol{\beta}}_j(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \mathbf{I}_{a(h)} \boldsymbol{\beta}_h(\ell), \quad h = 1, \dots, u \quad (4.2.10)$$

representa o submodelo do h -ésimo degrau, $h = 1, \dots, u$.

Admite-se que $\beta_1(0), \dots, \beta_u(0)$ são fixos e os restantes subvectores aleatórios são independentes tais que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_h(\ell) \sim (0; \sigma^2(\ell)) & h = 1, \dots, u, \quad \ell = 1, \dots, h-1 \\ \beta_h(\ell) \sim (\mathbf{0}_{a(h)}; \sigma^2(\ell) \mathbf{I}_{a(h)}) & h = 1, \dots, u, \quad \ell = h+1, \dots, u \\ \dot{\beta}_j(h) \sim \left(\mathbf{0}_{c_j(h)}; \dot{\sigma}_j^2(h) \mathbf{I}_{c_j(h)} \right) & h = 1, \dots, u, \quad j = 1, \dots, w(h), \end{array} \right. \quad (4.2.11)$$

com

$$\sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) = \sigma^2(h)$$

e

$$c_j(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{X}}_j(h) \right), \quad h = 1, \dots, u, \quad j = 1, \dots, w(h).$$

Os submodelos $\mathbf{y}(h)$, $h = 1, \dots, u$, são independentes com vectores médios

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(h) &= E \left[\beta_h(0) \mathbf{1}_{a(h)} + \sum_{\ell=1}^{h-1} \beta_h(\ell) \mathbf{1}_{a(h)} + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\mathbf{X}}_j(h) \dot{\beta}_j(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \mathbf{I}_{a(h)} \beta_h(\ell) \right] \\ &= \mathbf{1}_{a(h)} \boldsymbol{\mu}, \quad h = 1, \dots, u \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

e matrizes de covariância

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(h) &= \text{COV} \left[\beta_h(0) \mathbf{1}_{a(h)} + \sum_{\ell=1}^{h-1} \beta_h(\ell) \mathbf{1}_{a(h)} + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\mathbf{X}}_j(h) \dot{\beta}_j(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \mathbf{I}_{a(h)} \beta_h(\ell) \right] \\ &= \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) \mathbf{1}_{a(h)} \mathbf{1}_{a(h)}^t + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) \dot{\mathbf{X}}_j(h) \dot{\mathbf{X}}_j^t(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \mathbf{I}_{a(h)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) \mathbf{J}_{a(h)} + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) \dot{\mathbf{M}}_j(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \mathbf{I}_{a(h)}, \quad h = 1, \dots, u, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

com

$$\dot{\mathbf{M}}_j(h) = \dot{\mathbf{X}}_j(h) \dot{\mathbf{X}}_j^t(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad j = 1, \dots, w(h). \quad (4.2.14)$$

Assumimos que, em cada degrau h , $h = 1, \dots, u$, as matrizes (4.2.14) são tais que

$$\dot{\mathbf{M}}_j(h) \dot{\mathbf{M}}_{j'}(h) = \dot{\mathbf{M}}_{j'}(h) \dot{\mathbf{M}}_j(h), \quad j, j' = 1, \dots, w(h). \quad (4.2.15)$$

Uma vez que em cada submodelo as matrizes (4.2.14) comutam, então a família

$$\underline{\dot{\mathbf{M}}}(h) = \left\{ \dot{\mathbf{M}}_1(h), \dots, \dot{\mathbf{M}}_{w(h)}(h) \right\}, \quad h = 1, \dots, u \quad (4.2.16)$$

gera uma álgebra de Jordan comutativa $\dot{\mathcal{A}}(a(h))$, $h = 1, \dots, u$, com base principal

$$\underline{\dot{\mathcal{Q}}}(h) = bp \left(\dot{\mathcal{A}}(a(h)) \right) = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_1(h), \dots, \dot{\mathbf{Q}}_{m(h)}(h) \right\}, \quad h = 1, \dots, u, \quad (4.2.17)$$

tendo-se

$$\dot{\mathbf{M}}_j(h) = \sum_{k=1}^{m(h)} b_{j,k}(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h), \quad j = 1, \dots, w(h), \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.2.18)$$

Dado

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}}_1(h) = \frac{1}{a(h)} \mathbf{J}_{a(h)} & , \quad h = 1, \dots, u \\ \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\mathbf{Q}}_k(h) = \mathbf{I}_{a(h)} & , \quad h = 1, \dots, u \end{cases} \quad (4.2.19)$$

a álgebra anterior é regular e completa.

Tem-se ainda

$$\left[\underline{\dot{Q}}(h) \right]^{\frac{1}{2}} = bp^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\mathcal{A}}(a(h)) \right) = \left\{ \dot{\mathbf{A}}_1(h), \dots, \dot{\mathbf{A}}_{m(h)}(h) \right\}, \quad (4.2.20)$$

com

$$\dot{\mathbf{Q}}_k(h) = \dot{\mathbf{A}}_k^t(h) \dot{\mathbf{A}}_k(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 1, \dots, m(h) \quad (4.2.21)$$

e

$$\dot{\mathbf{A}}_1(h) = \frac{1}{\sqrt{a(h)}} \mathbf{1}_{a(h)}^t, \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.2.22)$$

Note-se que, também as matrizes $\mathbf{M}(h)$, $h = 1, \dots, u$, do modelo inicial, (4.2.1), comutam. Uma vez que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(h) &= \mathbf{X}(h) \mathbf{X}^t(h) \\ &= D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \left[\dot{\mathbf{X}}_1(h), \dots, \dot{\mathbf{X}}_{w(h)}(h) \right], \mathbf{1}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)} \right) \times \\ &\times D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \left[\dot{\mathbf{X}}_1^t(h), \dots, \dot{\mathbf{X}}_{w(h)}^t(h) \right]^t, \mathbf{1}_{a(h+1)}^t, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}^t \right) \\ &= D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \sum_{i=1}^{w(h)} \dot{\mathbf{M}}_i(h), \mathbf{J}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{J}_{a(u)} \right) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

então, sem perda de generalidade, para $h < \ell$ com $h, \ell = 1, \dots, u$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(h)\mathbf{M}(\ell) &= D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \sum_{i=1}^{w(h)} \dot{\mathbf{M}}_i(h), \mathbf{J}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{J}_{a(\ell)}, \dots, \mathbf{J}_{a(u)} \right) \times \\
&\times D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h)}, \dots, \sum_{i=1}^{w(\ell)} \dot{\mathbf{M}}_i(\ell), \mathbf{J}_{a(\ell+1)}, \dots, \mathbf{J}_{a(u)} \right) \\
&= D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \sum_{i=1}^{w(h)} \dot{\mathbf{M}}_i(h), \dots, \mathbf{J}_{a(j)} \mathbf{I}_{a(j)}, \dots, \mathbf{J}_{a(\ell)} \sum_{i=1}^{w(\ell)} \dot{\mathbf{M}}_i(\ell), \right. \\
&\quad \left. \mathbf{J}_{a(\ell+1)} \mathbf{J}_{a(\ell+1)}, \dots, \mathbf{J}_{a(u)} \mathbf{J}_{a(u)} \right).
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Como

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{a(\ell)} \sum_{i=1}^{w(\ell)} \dot{\mathbf{M}}_i(\ell) &= \mathbf{J}_{a(\ell)} \sum_{i=1}^{w(\ell)} \sum_{k=1}^{m(\ell)} b_{i,k}(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_k(\ell) \\
&= \sum_{i=1}^{w(\ell)} \sum_{k=1}^{m(\ell)} b_{i,k}(\ell) \mathbf{J}_{a(\ell)} \dot{\mathbf{Q}}_k(\ell) \\
&= \sum_{i=1}^{w(\ell)} \sum_{k=1}^{m(\ell)} b_{i,k}(\ell) a(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_1(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_k(\ell) \\
&= \sum_{i=1}^{w(\ell)} b_{i,1}(\ell) a(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_1(\ell) = \sum_{i=1}^{w(\ell)} b_{i,1}(\ell) \mathbf{J}_{a(\ell)}
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

e, por cálculos semelhantes,

$$\sum_{i=1}^{w(\ell)} \dot{\mathbf{M}}_i(\ell) \mathbf{J}_{a(\ell)} = \sum_{i=1}^{w(\ell)} b_{i,1}(\ell) \mathbf{J}_{a(\ell)} \tag{4.2.26}$$

então as matrizes $\mathbf{J}_{a(\ell)}$ e $\sum_{i=1}^{w(\ell)} \dot{\mathbf{M}}_i(\ell)$, $\ell = 1, \dots, u$, comutam.

Assim, tem-se que

$$\mathbf{M}(h)\mathbf{M}(\ell) = \mathbf{M}(\ell)\mathbf{M}(h), \quad h, \ell = 1, \dots, u. \quad (4.2.27)$$

Esta comutação faz com que seja gerada uma álgebra de Jordan comutativa associada ao modelo.

Retomando agora (4.2.13) e usando (4.2.18), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(h) &= a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_1(h) + \sum_{k=1}^{m(h)} \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h) + \sum_{k=1}^{m(h)} \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \\ &= a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_1(h) + \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h) + \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \\ &= a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_1(h) + \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \left(\sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \right) \\ &= a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) \dot{\mathbf{Q}}_1(h) + \dot{\mathbf{Q}}_1(h) \left(\sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,1}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \right) + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{m(h)} \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \left(\sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \right) \\ &= \left(a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,1}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \right) \dot{\mathbf{Q}}_1(h) + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{m(h)} \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \left(\sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\gamma}_k(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

com as componentes de variância canônicas, $\dot{\gamma}_\ell(h)$, $\ell = 1, 2$, $h = 1, \dots, u$, definidas por

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(h) = a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,1}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) & , \quad h = 1, \dots, u \\ \dot{\gamma}_k(h) = \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) & , \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \end{cases} \quad (4.2.29)$$

Fazendo

$$\gamma_k(h) = \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h) \quad (4.2.30)$$

podemos ainda escrever

$$\dot{\gamma}_k(h) = \gamma_k(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \quad (4.2.31)$$

Assim, tem-se

$$\mathbf{V}(h) = \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\gamma}_k(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h), \quad (4.2.32)$$

onde, para $h = 1, \dots, u$,

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(h) = a(h) \sum_{\ell=1}^{h-1} \sigma^2(\ell) + \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,1}(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \\ \dot{\gamma}_k(h) = \gamma_k(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \\ \gamma_k(h) = \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) b_{j,k}(h). \end{cases} \quad (4.2.33)$$

Seja $\mathbf{B}(h) = [b_{\ell,k}(h)]$ a matriz de transição de $\underline{\dot{M}}(h) \setminus \underline{\dot{Q}}(h)$, com

$$h = 1, \dots, u, \quad \ell = 1, \dots, w(h), \quad k = 1, \dots, m(h).$$

Como

$$\mathbf{B}(h) = \begin{bmatrix} b_{11}(h) & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{b}_{21}(h) & \mathbf{B}_{22}(h) \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u, \quad (4.2.34)$$

então

$$\mathbf{B}^t(h) = \begin{bmatrix} b_{11}(h) & \mathbf{b}_{21}^t(h) \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22}^t(h) \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.2.35)$$

Considerando agora

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^2(h) = \left[\dot{\sigma}_1^2(h) \cdots \dot{\sigma}_{w(u)}^2(h) \right]^t, & h = 1, \dots, u \\ \boldsymbol{\gamma}(h) = [\gamma_1(h) \cdots \gamma_{m(h)}(h)]^t, & h = 1, \dots, u, \end{cases} \quad (4.2.36)$$

podemos escrever

$$\boldsymbol{\gamma}(h) = \mathbf{B}^t(h) \boldsymbol{\sigma}^2(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad (4.2.37)$$

em que

$$\sigma^2(h) = \sum_{j=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_j^2(h) = \mathbf{1}^t \boldsymbol{\sigma}^2(h), \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.2.38)$$

Além disso, se considerarmos

$$\boldsymbol{\sigma}^2(h) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^2(h) \\ \boldsymbol{\sigma}_2^2(h) \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u \quad (4.2.39)$$

com

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_1^2(h) = \dot{\sigma}_1^2(h) = 0, & h = 1, \dots, u \\ \boldsymbol{\sigma}_2^2(h) = \left[\dot{\sigma}_2^2(h) \cdots \dot{\sigma}_{w(h)}^2(h) \right]^t, & h = 1, \dots, u, \end{cases} \quad (4.2.40)$$

e

$$\boldsymbol{\gamma}(h) = \begin{bmatrix} \gamma_1(h) \\ \gamma_2(h) \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u \quad (4.2.41)$$

com

$$\begin{cases} \gamma_1(h) = \gamma_1(h) & , \quad h = 1, \dots, u \\ \gamma_2(h) = [\gamma_2(h) \cdots \gamma_{m(h)}(h)]^t & , \quad h = 1, \dots, u, \end{cases} \quad (4.2.42)$$

então

$$\boldsymbol{\gamma}(h) = \mathbf{B}^t(h) \boldsymbol{\sigma}^2(h) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1(h) = \mathbf{b}_{21}^t(h) \boldsymbol{\sigma}_2^2(h), \quad h = 1, \dots, u \\ \gamma_2(h) = \mathbf{B}_{22}^t(h) \boldsymbol{\sigma}_2^2(h), \quad h = 1, \dots, u. \end{cases} \quad (4.2.43)$$

Para que as componentes de $\boldsymbol{\sigma}^2(h)$ determinem a matriz de covariância de $\mathbf{y}(h)$, as matrizes da família (4.2.16) têm que ser linearmente independentes, o que significa que $\mathbf{B}_{22}(h)$ tem que ser horizontalmente livre e então

$$\begin{cases} \gamma_1(h) = \mathbf{b}_{21}^t(h) \boldsymbol{\sigma}_2^2(h) & , \quad h = 1, \dots, u \\ \boldsymbol{\sigma}_2^2(h) = (\mathbf{B}_{22}^t(h))^+ \boldsymbol{\gamma}_2(h) & , \quad h = 1, \dots, u, \end{cases} \quad (4.2.44)$$

com $^+$ indicando a inversa de Moore Penrose. Assim, tanto os vectores $\boldsymbol{\sigma}_2^2(h)$ como os $\boldsymbol{\gamma}_1(h)$ podem ser estimados a partir de $\boldsymbol{\gamma}_2(h)$.

Considerando

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2(h) = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_2(h) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_{m(h)}(h) \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u \quad (4.2.45)$$

então

$$\begin{aligned}
\gamma_2(h) &= \begin{bmatrix} \gamma_2(h) \\ \vdots \\ \gamma_{m(h)}(h) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_2(h) - \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_{m(h)}(h) - \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \end{bmatrix} \\
&= \dot{\gamma}_2(h) - \left(\sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \right) \mathbf{1}_{(m(h)-1)}, \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.2.46)
\end{aligned}$$

As componentes de variância

$$\dot{\sigma}_k^2(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h), \quad (4.2.47)$$

para o h -ésimo degrau, são as componentes do vector

$$\sigma_2^2(h) = (\mathbf{B}_{22}^t(h))^+ \left(\dot{\gamma}_2(h) - \left(\sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \right) \mathbf{1}_{(m(h)-1)} \right), \quad h = 1, \dots, u, \quad (4.2.48)$$

onde

$$\sigma^2(\ell) = \mathbf{1}^t \sigma_2^2(\ell), \quad h = 1, \dots, u, \quad \ell = h+1, \dots, u. \quad (4.2.49)$$

Caso algum degrau h' , $h' = 1, \dots, u$, tenha um único factor a expressão (4.2.48) vem

$$\sigma^2(h') = \dot{\sigma}_2^2(h') = \dot{\gamma}_2(h') - \sum_{\ell=h'+1}^u \sigma^2(\ell). \quad (4.2.50)$$

4.2.2 Estimação

Por forma a estimar as componentes de variância anteriores, é necessário começar por estimar as componentes de $\dot{\gamma}_2(h)$, $h = 1, \dots, u$.

Considerando os vectores

$$\tilde{\dot{\eta}}_k(h) = \dot{\mathbf{A}}_k(h)\mathbf{y}(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 1, \dots, m(h) \quad (4.2.51)$$

e usando (4.2.12) e (4.2.28) podemos escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\dot{\eta}}_k(h) \sim \left(\dot{\eta}_k(h); \dot{\gamma}_k(h)\mathbf{I}_{g_k(h)} \right) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 1, \dots, m(h) \\ \dot{\eta}_k(h) = \dot{\mathbf{A}}_k(h)\boldsymbol{\mu}(h) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 1, \dots, m(h) \\ g_k(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_k(h) \right) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 1, \dots, m(h). \end{array} \right. \quad (4.2.52)$$

Como, para $h = 1, \dots, u$, $k = 2, \dots, m(h)$,

$$E \left[\tilde{\dot{\eta}}_k(h) \right] = \dot{\mathbf{A}}_k(h)E[\mathbf{y}(h)] = \dot{\mathbf{A}}_k(h)\boldsymbol{\mu}(h) = \mathbf{0}_{g_k(h)} \quad (4.2.53)$$

então

$$\tilde{\dot{\eta}}_k(h) \sim \left(\mathbf{0}_{g_k(h)}; \dot{\gamma}_k(h)\mathbf{I}_{g_k(h)} \right) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 2, \dots, m(h). \quad (4.2.54)$$

Além disso, os vectores (4.2.51) são tais que, para $k \neq k'$, se tem

$$\begin{aligned}
\mathbf{COV} \left[\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_k(h); \tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_{k'}(h) \right] &= \mathbf{COV} \left[\dot{\mathbf{A}}_k(h) \mathbf{y}(h); \dot{\mathbf{A}}_{k'}(h) \mathbf{y}(h) \right] \\
&= \dot{\mathbf{A}}_k(h) \left(\sum_{i=1}^{m(h)} \dot{\gamma}_i(h) \left[\dot{\mathbf{A}}_i(h) \right]^t \dot{\mathbf{A}}_i(h) \right) \left[\dot{\mathbf{A}}_{k'}(h) \right]^t \\
&= \left(\dot{\gamma}_k(h) \dot{\mathbf{A}}_k(h) \left[\dot{\mathbf{A}}_k(h) \right]^t \dot{\mathbf{A}}_k(h) \right) \left[\dot{\mathbf{A}}_{k'}(h) \right]^t \\
&= \mathbf{0}_{g_k(h) \times g_{k'}(h)},
\end{aligned} \tag{4.2.55}$$

com

$$h = 1, \dots, u, \quad k, k' = 2, \dots, m(h).$$

Seja

$$S_k(h) = \|\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_k(h)\|^2, \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \tag{4.2.56}$$

Utilizando agora o mesmo procedimento, que permitiu encontrar (3.2.46), obtêm-se os estimadores centrados

$$\tilde{\dot{\gamma}}_k(h) = \frac{\|\dot{\mathbf{A}}_k(h) \mathbf{y}(h)\|^2}{g_k(h)}, \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \tag{4.2.57}$$

Assim,

$$\tilde{\dot{\gamma}}_k(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h) \tag{4.2.58}$$

é um estimador centrado de

$$\dot{\gamma}_k(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h) \tag{4.2.59}$$

através do qual se obtêm estimadores centrados para

$$\dot{\sigma}_j^2(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad j = 1, \dots, w(h). \quad (4.2.60)$$

Considerando

$$\tilde{\dot{\gamma}}_2(h) = \begin{bmatrix} \tilde{\dot{\gamma}}_2(u) \\ \vdots \\ \tilde{\dot{\gamma}}_{m(u)}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\|\dot{\mathbf{A}}_2(h)\mathbf{y}(h)\|^2}{g_2(h)} \\ \vdots \\ \frac{\|\dot{\mathbf{A}}_{m(h)}(h)\mathbf{y}(h)\|^2}{g_{m(h)}(h)} \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, u, \quad (4.2.61)$$

então

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_2(h) &= \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_2(h) \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_{m(h)}(h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\dot{\gamma}}_2(h) - \sum_{\ell=h+1}^u \tilde{\sigma}^2(\ell) \\ \vdots \\ \tilde{\dot{\gamma}}_{m(h)}(h) - \sum_{\ell=h+1}^u \tilde{\sigma}^2(\ell) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\dot{\gamma}}_2(h) - \left(\sum_{\ell=h+1}^u \tilde{\sigma}^2(\ell) \right) \mathbf{1}_{(m(h)-1)}, \quad h = 1, \dots, u. \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

Os estimadores para as componentes de variância

$$\dot{\sigma}_k^2(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h), \quad (4.2.63)$$

para o h -ésimo degrau, $h = 1, \dots, u$, obtêm-se através de

$$\tilde{\sigma}_2^2(h) = (\mathbf{B}_{22}^t(h))^+ \left(\tilde{\dot{\gamma}}_2(h) - \left(\sum_{\ell=h+1}^u \tilde{\sigma}^2(\ell) \right) \mathbf{1}_{(m(h)-1)} \right), \quad (4.2.64)$$

onde

$$\tilde{\sigma}^2(\ell) = \mathbf{1}^t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^2(\ell), \quad h = 1, \dots, u, \quad \ell = h + 1, \dots, u. \quad (4.2.65)$$

Caso algum degrau h' , $h' = 1, \dots, u$, tenha um único factor a expressão (4.2.64) vem

$$\tilde{\sigma}^2(h') = \tilde{\dot{\sigma}}_2^2(h') = \tilde{\dot{\gamma}}_2(h') - \sum_{\ell=h'+1}^u \tilde{\sigma}^2(\ell). \quad (4.2.66)$$

4.2.3 Normalidade

Na análise efectuada anteriormente nada foi assumido quanto à distribuição do modelo. Se assumirmos agora a normalidade podemos provar que os estimadores anteriormente obtidos, além de centrados são funções de estatísticas suficientes.

Consideremos

$$\boldsymbol{\beta}(h) \sim N(\mathbf{0}_{c(h)}; \sigma^2(h) \mathbf{I}_{c(h)}), \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.2.67)$$

Com base no pressuposto anterior tem-se

$$\mathbf{y}(h) \sim N(\boldsymbol{\mu}(h); \mathbf{V}(h)), \quad h = 1, \dots, u, \quad (4.2.68)$$

com

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}(h) = \mathbf{1}_{a(h)} \mu & , \quad h = 1, \dots, u \\ \mathbf{V}(h) = \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\gamma}_k(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h) & , \quad h = 1, \dots, u. \end{cases} \quad (4.2.69)$$

As componentes de variância canónicas, $\dot{\gamma}_k(h)$, estão definidas em (4.2.29).

Fazendo

$$\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_k(h) = \dot{\mathbf{A}}_k(h) \mathbf{y}(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 1, \dots, m(h) \quad (4.2.70)$$

tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_k(h) \cap N \left(\mathbf{0}_{g_k(h)}; \dot{\gamma}_k(h) \mathbf{I}_{g_k(h)} \right) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 2, \dots, m(h) \\ g_k(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_k(h) \right) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 2, \dots, m(h). \end{array} \right. \quad (4.2.71)$$

Como as álgebras de Jordan comutativas $\dot{\mathcal{A}}(a(h))$, $h = 1, \dots, u$, são completas então

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{V}(h)]^{-1} = \sum_{k=1}^{m(h)} \frac{1}{\dot{\gamma}_k(h)} \dot{\mathbf{Q}}_k(h) \quad , \quad h = 1, \dots, u \\ |\mathbf{V}(h)| = \prod_{k=1}^{m(h)} (\dot{\gamma}_k(h))^{g_k(h)} \quad , \quad h = 1, \dots, u. \end{array} \right. \quad (4.2.72)$$

Além disso, para $h = 1, \dots, u$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}(h) - \boldsymbol{\mu}(h)]^t [\mathbf{V}(h)]^{-1} [\mathbf{y}(h) - \boldsymbol{\mu}(h)] &= \sum_{k=1}^{m(h)} \frac{1}{\dot{\gamma}_k(h)} \|\dot{\mathbf{A}}_k(h) [\mathbf{y}(h) - \boldsymbol{\mu}(h)]\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m(h)} \frac{1}{\dot{\gamma}_k(h)} \|\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_k(h) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_k(h)\|^2 \\ &= \frac{\|\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_1(h) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2}{\dot{\gamma}_1(h)} + \sum_{k=2}^{m(h)} \frac{\|\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_k(h)\|^2}{\dot{\gamma}_k(h)} \\ &= \frac{\|\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_1(h) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2}{\dot{\gamma}_1(h)} + \sum_{k=2}^{m(h)} \frac{S_k(h)}{\dot{\gamma}_k(h)}. \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

Como

$$\|\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_1(h) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2 = \|\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_1(h)\|^2 - 2 \left[\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(h) \right]^t \tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_1(h) + \|\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(h)\|^2 \quad (4.2.74)$$

então

$$\begin{aligned}
[\mathbf{y}(h) - \boldsymbol{\mu}(h)]^t [\mathbf{V}(h)]^{-1} [\mathbf{y}(h) - \boldsymbol{\mu}(h)] &= \left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^{-1} \times \\
&\times \left(\|\tilde{\dot{\gamma}}_1(h)\|^2 - 2 \left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^t \tilde{\dot{\gamma}}_1(h) + \right. \\
&+ \left. \|\dot{\gamma}_1(h)\|^2 \right) + \sum_{k=2}^{m(h)} \left[\dot{\gamma}_k(h) \right]^{-1} S_k(h).
\end{aligned} \tag{4.2.75}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
n(\mathbf{y}(h) | \boldsymbol{\mu}(h), \mathbf{V}(h)) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{V}(h)|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} [\mathbf{y}(h) - \boldsymbol{\mu}(h)]^t [\mathbf{V}(h)]^{-1} (\mathbf{y}(h) - \boldsymbol{\mu}(h))} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2} \left[\left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^{-1} \|\tilde{\dot{\gamma}}_1(h)\|^2 - 2 \left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^{-1} \left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^t \tilde{\dot{\gamma}}_1(h) + \left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^{-1} \|\dot{\gamma}_1(h)\|^2 \right]}}{(2\pi)^{\frac{a(h)}{2}} \prod_{k=1}^{m(h)} (\dot{\gamma}_k(h))^{\frac{g_k(h)}{2}}} \times \\
&\times e^{-\frac{1}{2} \left[\sum_{k=2}^{m(h)} \left[\dot{\gamma}_k(h) \right]^{-1} S_k(h) \right]} = \\
&= e^{\left[-2\dot{\gamma}_1(h) \right]^{-1} \|\tilde{\dot{\gamma}}_1(h)\|^2 + \left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^{-1} \left[\dot{\gamma}_1(h) \right]^t \tilde{\dot{\gamma}}_1(h) + \sum_{k=2}^{m(h)} \left[\dot{\gamma}_k(h) \right]^{-1} S_k(h)} \times \\
&\times \frac{e^{\left[-2\dot{\gamma}_1(h) \right]^{-1} \|\dot{\gamma}_1(h)\|^2}}{(2\pi)^{\frac{a(h)}{2}} \prod_{k=1}^{m(h)} (\dot{\gamma}_k(h))^{\frac{g_k(h)}{2}}}.
\end{aligned} \tag{4.2.76}$$

Para cada um dos h degraus, $h = 1, \dots, u$, aplicando o teorema da factorização, teorema 2.6.1, tem-se que

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}(h)) = \left(\|\tilde{\dot{\gamma}}_1(h)\|^2, \tilde{\dot{\gamma}}_1(h), S_2(h), \dots, S_{m(h)}(h) \right)$$

é uma estatística suficiente para o parâmetro

$$\boldsymbol{\theta}(h) = \left(\dot{\gamma}_1(h), \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(h), \dot{\gamma}_2(h), \dots, \dot{\gamma}_{m(h)}(h) \right).$$

Além disso, como a distribuição normal pertence à família exponencial, se o espaço paramétrico do degrau contiver abertos, então a estatística é suficiente e completa, proposição 2.6.1. Nesse caso, aplicando o teorema 2.6.3, tem-se que em cada um dos h degraus, os estimadores

$$\begin{cases} \widetilde{\dot{\gamma}}_k(h) & , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 2, \dots, m(h) \\ \widetilde{\gamma}_k(h) & , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 2, \dots, m(h) \\ \widetilde{\dot{\sigma}}_j^2(h) & , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad j = 1, \dots, w(h) \end{cases} \quad (4.2.77)$$

são, dentro da família dos estimadores que se obtêm dos vectores de observações dos degraus, UMVUE.

Raciocinando como no capítulo anterior, têm-se estatísticas suficientes para o aninhamento em escada estruturado não se conseguindo estabelecer no entanto estatísticas completas.

Os vectores $\widetilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_k(h)$, $h = 1, \dots, u$, $k = 2, \dots, m(h)$, são independentes pois a sua função distribuição conjunta é normal e as matrizes de covariância cruzadas são nulas. Tem-se então que os vectores $S_k(h)$, $h = 1, \dots, u$, $k = 2, \dots, m(h)$, também são independentes. Usando (4.2.71) tem-se

$$S_k(h) \sim \dot{\gamma}_k(h) \chi_{g_k(h)}^2, \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \quad (4.2.78)$$

Como os $S_k(h)$, $h = 1, \dots, u$, $k = 2, \dots, m(h)$, são independentes e a sua função de distribuição é dada por (4.2.78) podemos escrever

$$\frac{g_{k+1}(h)S_k(h)}{g_k(h)S_{k+1}(h)} \sim \frac{\dot{\gamma}_k(h)}{\dot{\gamma}_{k+1}(h)} \mathcal{F}_{g_k(h), g_{k+1}(h)}, \quad h = 1, \dots, u, k = 2, \dots, m(h). \quad (4.2.79)$$

4.2.4 Exemplo de Aplicação

De forma a exemplificar a teoria anterior, voltamos ao exemplo apresentado no início deste capítulo. Considere-se o modelo de efeitos aleatórios, com aninhamento em escada estruturado apresentado na figura seguinte. Neste modelo temos 3 degraus e 4 factores. O primeiro degrau tem o factor A com três níveis, que tem aninhado o factor B com dois níveis no segundo degrau e este aninha ainda, no terceiro degrau, um submodelo com cruzamento dos factores C e D, cada um com dois níveis. O cruzamento será abordado mais à frente no capítulo seguinte.

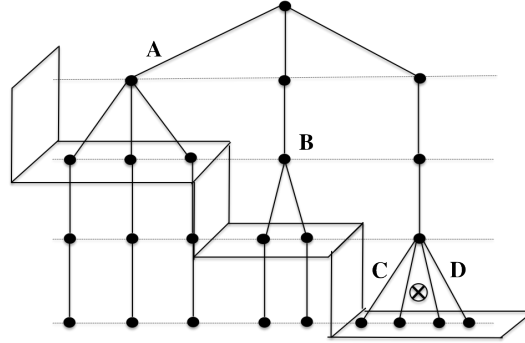


Figura 4.2.1: Modelo com aninhamento em escada estruturado, com 3 degraus e 4 factores

As componentes de variância são

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2(A) \\ \sigma^2(B) \\ \sigma^2(C) \\ \sigma^2(D) \\ \sigma^2(CD). \end{array} \right. \quad (4.2.80)$$

Vejamos como obter estimadores para essas componentes.

Este modelo tem $n = 9$ tratamentos sendo o número de níveis em cada degrau

$$\begin{cases} a(1) = 3 \\ a(2) = 2 \\ a(3) = 4. \end{cases}$$

Considere-se que o vector de observações é dado por

$$\mathbf{y}_9 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \mathbf{y}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(3) = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.2.81)$$

No degrau $h = 3$ tem-se o cruzamento dos factores C e D, pelo que as matrizes de incidência, $\dot{\mathbf{X}}_j(3)$, $j = 1, 2, 3, 4$, são

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_1(3) = \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_4 \\ \dot{\mathbf{X}}_2(3) = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \\ \dot{\mathbf{X}}_3(3) = \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \\ \dot{\mathbf{X}}_4(3) = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_4. \end{cases} \quad (4.2.82)$$

Com $\dot{\mathbf{M}}_j(3) = \dot{\mathbf{X}}_j(3) \dot{\mathbf{X}}_j^t(3)$, $j = 1, 2, 3, 4$, têm-se as matrizes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{M}}_1(3) = \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{J}_2 \\ \dot{\mathbf{M}}_2(3) = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2 \\ \dot{\mathbf{M}}_3(3) = \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \\ \dot{\mathbf{M}}_4(3) = \mathbf{I}_4. \end{array} \right. \quad (4.2.83)$$

A base principal da álgebra de Jordan comutativa a que se associa o submodelo neste degrau é

$$\underline{\dot{Q}}(3) = bp \left(\dot{\mathcal{A}}(a(3)) \right) = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_1(3), \dot{\mathbf{Q}}_2(3), \dot{\mathbf{Q}}_3(3), \dot{\mathbf{Q}}_4(3) \right\}, \quad (4.2.84)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{Q}}_1(3) = \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{J}_4 \\ \dot{\mathbf{Q}}_2(3) = \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes (\mathbf{I}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{J}_4 \\ \dot{\mathbf{Q}}_3(3) = \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 = (\mathbf{I}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{J}_4 \\ \dot{\mathbf{Q}}_4(3) = \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2 = (\mathbf{I}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes (\mathbf{I}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) = \mathbf{I}_4 - \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{J}_4. \end{array} \right. \quad (4.2.85)$$

Tem-se ainda

$$\left[\underline{\dot{Q}}(3) \right]^{\frac{1}{2}} = bp^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\mathcal{A}}(a(3)) \right) = \left\{ \dot{\mathbf{A}}_1(3), \dot{\mathbf{A}}_2(3), \dot{\mathbf{A}}_3(3), \dot{\mathbf{A}}_4(3) \right\}, \quad (4.2.86)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{A}}_1(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t = \frac{1}{2} \mathbf{1}_4^t \\ \dot{\mathbf{A}}_2(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \\ \dot{\mathbf{A}}_3(3) = \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \\ \dot{\mathbf{A}}_4(3) = \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2. \end{array} \right. \quad (4.2.87)$$

e

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4.2.88)$$

Sendo $g_k(3) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_k(3) \right)$, $k = 1, 2, 3, 4$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(3) = \text{car} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right) = 1 \\ g_2(3) = \text{car} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \right) = 1 \\ g_3(3) = \text{car} \left(\mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right) = 1 \\ g_4(3) = \text{car} \left(\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2 \right) = 1. \end{array} \right. \quad (4.2.89)$$

Podemos agora escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{M}}_1(3) = 4\dot{\mathbf{Q}}_1(3) + 0\dot{\mathbf{Q}}_2(3) + 0\dot{\mathbf{Q}}_3(3) + 0\dot{\mathbf{Q}}_4(3) \\ \dot{\mathbf{M}}_2(3) = 2\dot{\mathbf{Q}}_1(3) + 0\dot{\mathbf{Q}}_2(3) + 2\dot{\mathbf{Q}}_3(3) + 0\dot{\mathbf{Q}}_4(3) \\ \dot{\mathbf{M}}_3(3) = 2\dot{\mathbf{Q}}_1(3) + 2\dot{\mathbf{Q}}_2(3) + 0\dot{\mathbf{Q}}_3(3) + 0\dot{\mathbf{Q}}_4(3) \\ \dot{\mathbf{M}}_3(4) = 1\dot{\mathbf{Q}}_1(3) + 1\dot{\mathbf{Q}}_2(3) + 1\dot{\mathbf{Q}}_3(3) + 1\dot{\mathbf{Q}}_4(3), \end{array} \right. \quad (4.2.90)$$

obtendo-se a matriz de transição

$$\mathbf{B}(3) = \begin{bmatrix} b_{11}(3) & \mathbf{0}_3^t \\ \mathbf{b}_{21}(3) & \mathbf{B}_{22}(3) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (4.2.91)$$

e

$$(\mathbf{B}_{22}^t(3))^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2.92)$$

Aplicando (4.2.64), tem-se

$$\tilde{\sigma}_2^2(3) = (\mathbf{B}_{22}^t(3))^{-1} \tilde{\dot{\gamma}}_2(3). \quad (4.2.93)$$

pelo que para as componentes de variância do degrau $h = 3$ obtemos os estimadores

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^2(C) = \widetilde{\dot{\sigma}_C^2}(3) = \frac{\tilde{\dot{\gamma}}_3(3) - \tilde{\dot{\gamma}}_4(3)}{2} \\ \tilde{\sigma}^2(D) = \widetilde{\dot{\sigma}_D^2}(3) = \frac{\tilde{\dot{\gamma}}_2(3) - \tilde{\dot{\gamma}}_4(3)}{2} \\ \tilde{\sigma}^2(CD) = \widetilde{\dot{\sigma}_{CD}^2}(3) = \tilde{\dot{\gamma}}_4(3) \\ \tilde{\sigma}^2(3) = \frac{\tilde{\dot{\gamma}}_2(3) + \tilde{\dot{\gamma}}_3(3)}{2}, \end{array} \right. \quad (4.2.94)$$

com

$$\tilde{\dot{\gamma}}_k(3) = \|\dot{\mathbf{A}}_k(3)\mathbf{y}(3)\|^2, \quad k = 2, 3, 4. \quad (4.2.95)$$

No degrau $h = 2$, tem-se um factor com dois níveis pelo que as matrizes de incidência são

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_1(2) = \mathbf{1}_2 \\ \dot{\mathbf{X}}_1(2) = \mathbf{I}_2 \end{cases} \quad (4.2.96)$$

e

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}}_1(2) = \mathbf{J}_2 \\ \dot{\mathbf{M}}_1(2) = \mathbf{I}_2. \end{cases} \quad (4.2.97)$$

Tem-se ainda que

$$\underline{\dot{Q}}(2) = bp \left(\dot{\mathcal{A}}(a(2)) \right) = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_1(2), \dot{\mathbf{Q}}_2(2) \right\}, \quad (4.2.98)$$

com

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}}_1(2) = \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \\ \dot{\mathbf{Q}}_2(2) = \mathbf{I}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \end{cases} \quad (4.2.99)$$

e

$$\left[\underline{\dot{Q}}(2) \right]^{\frac{1}{2}} = bp^{\frac{1}{2}} \left(\dot{\mathcal{A}}(a(2)) \right) = \left\{ \dot{\mathbf{A}}_1(2), \dot{\mathbf{A}}_2(2) \right\} \quad (4.2.100)$$

com

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}}_1(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \\ \dot{\mathbf{A}}_2(2) = \mathbf{T}_2. \end{cases} \quad (4.2.101)$$

Usando (4.2.66), o estimador para a componente de variância do factor do degrau 2 é

$$\tilde{\sigma}^2(B) = \tilde{\sigma}^2(2) = \tilde{\dot{\gamma}}_2(2) - \tilde{\sigma}^2(3), \quad (4.2.102)$$

com

$$\tilde{\dot{\gamma}}_2(2) = \frac{\|\mathbf{T}_2 \mathbf{y}(2)\|^2}{a(2) - 1} \quad (4.2.103)$$

e $\tilde{\sigma}^2(3)$ já calculado em (4.2.94).

De forma muito semelhante obtém-se que o estimador para a componente de variância do factor do degrau $h = 1$ é

$$\tilde{\sigma}^2(A) = \tilde{\sigma}^2(1) = \tilde{\dot{\gamma}}_2(1) - (\tilde{\sigma}^2(2) + \tilde{\sigma}^2(3)) \quad (4.2.104)$$

com

$$\tilde{\dot{\gamma}}_2(1) = \frac{\|\mathbf{T}_3 \mathbf{y}(1)\|^2}{a(1) - 1} \quad (4.2.105)$$

e os estimadores dos degraus anteriores dados por (4.2.94) e (4.2.102).

É agora possível calcular os estimadores para as componentes de variância do modelo da figura (4.2.1), para qualquer vector de observações \mathbf{y} definido em (4.2.81).

4.3 Modelo Global

De forma a utilizar a abordagem global para o aninhamento em escada estruturado, foi necessário redefinir as matrizes (4.2.2) e os vectores dos efeitos (4.2.3). As alterações permitem que o aninhamento em escada estruturado possa ser tratado como um todo e originaram um modelo diferente do anterior. No entanto, como iremos ver, conseguem-se obter os mesmos estimadores para as componentes de variância que com o modelo estruturado degrau a degrau.

4.3.1 Estrutura Algébrica

Seja u o número de degraus, $a(h)$ o número de níveis do h -ésimo degrau e $n = \sum_{h=1}^u a(h)$ o número de tratamentos total.

O modelo de efeitos aleatórios com aninhamento em escada estruturado é dado por

$$\mathbf{y} = \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) \quad (4.3.1)$$

com

$$\begin{cases} \mathbf{X}(0) = D(\mathbf{1}_{a(1)}, \mathbf{1}_{a(2)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}) \\ \mathbf{X}(h) = [\mathbf{X}_1(h) \cdots \mathbf{X}_{w(h)}(h)] \end{cases}, \quad h = 1, \dots, u \quad (4.3.2)$$

onde, para $h = 1, \dots, u$, $i = 1, \dots, w(h)$,

$$\mathbf{X}_i(h) = D\left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \dot{\mathbf{X}}_i(h), \mathbf{1}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}\right), \quad (4.3.3)$$

e

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}(0) = [\beta_1(0), \dots, \beta_u(0)]^t \\ \boldsymbol{\beta}(h) = [\boldsymbol{\beta}_1^t(h), \dots, \boldsymbol{\beta}_{w(h)}^t(h)]^t, \quad h = 1, \dots, u, \quad i = 1, \dots, w(h) \\ \boldsymbol{\beta}_i(h) = \left[\mathbf{0}_{a(1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1)}^t, \dot{\boldsymbol{\beta}}_i^t(h), 0, \dots, 0\right]^t, \quad h = 1, \dots, u, \quad i = 1, \dots, w(h). \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Note-se que, para $h = 1, \dots, u$, $i = 1, \dots, w(h)$, se tem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i(h) &= \mathbf{X}_i(h) \mathbf{X}_i^t(h) \\ &= D\left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \dot{\mathbf{X}}_i(h) \dot{\mathbf{X}}_i^t(h), \mathbf{J}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{J}_{a(u)}\right). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

O modelo (4.3.1) pode ainda escrever-se como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= \sum_{h=0}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) \\
 &= \mathbf{X}(0) \boldsymbol{\beta}(0) + \sum_{h=1}^u \mathbf{X}(h) \boldsymbol{\beta}(h) \\
 &= \boldsymbol{\mu} + \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} \mathbf{X}_i(h) \boldsymbol{\beta}_i(h).
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

O vector médio do modelo é dado por

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{y}] = \mathbf{1}_n \mu \tag{4.3.7}$$

e a matriz de covariância é

$$\mathbf{V} = \mathbf{COV}[\mathbf{y}] = \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} \mathbf{X}_i(h) \mathbf{COV}[\boldsymbol{\beta}_i(h)] \mathbf{X}_i^t(h). \tag{4.3.8}$$

Como

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_i(h) \sim \left(\mathbf{0}_{c_i(h)}; \dot{\sigma}_i^2(h) \mathbf{I}_{c_i(h)} \right), h = 1, \dots, u, i = 1, \dots, w(h), c_i(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{X}}_i(h) \right) \tag{4.3.9}$$

então

$$\mathbf{COV}[\boldsymbol{\beta}_i(h)] = D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1) \times a(h-1)}, \dot{\sigma}_i^2(h) \mathbf{I}_{c_i(h)}, 0, \dots, 0 \right). \tag{4.3.10}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \dot{\mathbf{X}}_i(h), \mathbf{1}_{a(h+1)}, \dots, \mathbf{1}_{a(u)} \right) \times \\
&\times D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1) \times a(h-1)}, \dot{\sigma}_i^2(h) \mathbf{I}_{c_i(h)}, 0, \dots, 0 \right) \times \\
&\times D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \mathbf{I}_{a(2)} \dots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \dot{\mathbf{X}}_i^t(h), \mathbf{1}_{a(h+1)}^t, \dots, \mathbf{1}_{a(u)}^t \right) \\
&= \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \dot{\mathbf{X}}_i(h) \dot{\sigma}_i^2(h) \mathbf{I}_{c_i(h)} \dot{\mathbf{X}}_i^t(h), \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right) \\
&= \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \dot{\sigma}_i^2(h) \dot{\mathbf{M}}_i(h), \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

com

$$\dot{\mathbf{M}}_i(h) = \dot{\mathbf{X}}_i(h) \dot{\mathbf{X}}_i^t(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad i = 1, \dots, w(h). \tag{4.3.12}$$

Tal como na secção 4.2.1, assumimos que as matrizes anteriores comutam e que

$$\dot{\mathbf{M}}_i(h) = \sum_{k=1}^{m(h)} b_{i,k}(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad i = 1, \dots, w(h) \tag{4.3.13}$$

com $\dot{\mathbf{Q}}_k(h)$, $h = 1, \dots, u$, matrizes que pertencem à base principal

$$\underline{\dot{Q}}(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad h = 1, \dots, u \tag{4.3.14}$$

definida em (4.2.17).

Seja

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(h) &= \mathbf{X}(h)\mathbf{X}^t(h) \\
&= [\mathbf{X}_1(h) \cdots \mathbf{X}_{w(h)}(h)] [\mathbf{X}_1^t(h) \cdots \mathbf{X}_{w(h)}^t(h)]^t \\
&= \sum_{i=1}^{w(h)} \mathbf{M}_i(h) \\
&= \sum_{i=1}^{w(h)} D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \cdots, \dot{\mathbf{M}}_i(h), \mathbf{J}_{a(h+1)}, \cdots, \mathbf{J}_{a(u)} \right), \quad (4.3.15)
\end{aligned}$$

então, sem perda de generalidade, para $h < \ell$ com $h, \ell = 1, \cdots, u$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(h)\mathbf{M}(\ell) &= \sum_{i=1}^{w(h)} D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \cdots, \mathbf{I}_{a(h-1)}, \dot{\mathbf{M}}_i(h), \cdots, \mathbf{J}_{a(\ell)}, \cdots, \mathbf{J}_{a(u)} \right) \times \\
&\times \sum_{i=1}^{w(\ell)} D \left(\mathbf{I}_{a(1)}, \cdots, \mathbf{I}_{a(h)}, \cdots, \dot{\mathbf{M}}_i(\ell), \mathbf{J}_{a(\ell+1)}, \cdots, \mathbf{J}_{a(u)} \right) \\
&= \mathbf{M}(\ell)\mathbf{M}(h). \quad (4.3.16)
\end{aligned}$$

Conclui-se que as matrizes $\mathbf{M}(h)$, $h = 1, \cdots, u$, do modelo global comutam. Sendo a base principal da álgebra de Jordan comutativa global a que se associa este modelo, \underline{Q} , definida como

$$\underline{Q} = \bigtimes_{h=1}^u \dot{\underline{Q}}(h), \quad (4.3.17)$$

em que \times representa o produto cartesiano de álgebras de Jordan comutativas, ver proposição 2.5.6. As matrizes que constituem \underline{Q} são as matrizes diagonais por blocos $\mathbf{Q}_k(h)$, $h = 1, \cdots, u$, $k = 1, \cdots, m(h)$, dadas por

$$\mathbf{Q}_k(h) = D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1) \times a(h-1)}, \dot{\mathbf{Q}}_k(h), \mathbf{0}_{a(h+1) \times a(h+1)}, \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right). \quad (4.3.18)$$

Tem-se ainda

$$\underline{Q}^{\frac{1}{2}} = \bigotimes_{h=1}^u \left[\underline{\dot{Q}}(h) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.19)$$

constituída pelas matrizes

$$\mathbf{A}_1(h) = \left[\mathbf{0}_{a(1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(h-1)}^t, \dot{\mathbf{A}}_1(h), \mathbf{0}_{a(h+1)}^t, \dots, \mathbf{0}_{a(u)}^t \right], \quad h = 1, \dots, u \quad (4.3.20)$$

e

$$\mathbf{A}_k(h) = \left[\mathbf{0}_{g_k(h) \times a(1)}, \dots, \mathbf{0}_{g_k(h) \times a(h-1)}, \dot{\mathbf{A}}_k(h), \mathbf{0}_{g_k(h) \times a(h+1)}, \dots, \mathbf{0}_{g_k(h) \times a(u)} \right], \quad (4.3.21)$$

com

$$g_k(h) = \text{car} \left(\dot{\mathbf{A}}_k(h) \right), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \quad (4.3.22)$$

Usando (4.3.13) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \dot{\sigma}_i^2(h) \sum_{k=1}^{m(h)} b_{i,k}(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h), \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right) \\ &= \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} \sum_{k=1}^{m(h)} D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \dot{\sigma}_i^2(h) b_{i,k}(h) \dot{\mathbf{Q}}_k(h), \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right) \\ &= \sum_{h=1}^u \sum_{i=1}^{w(h)} \sum_{k=1}^{m(h)} \dot{\sigma}_i^2(h) b_{i,k}(h) D \left(\mathbf{0}_{a(1) \times a(1)}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_k(h), \dots, \mathbf{0}_{a(u) \times a(u)} \right). \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Por (4.3.18) vem

$$\mathbf{V} = \sum_{h=1}^u \sum_{k=1}^{m(h)} \sum_{i=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_i^2(h) b_{i,k}(h) \mathbf{Q}_k(h). \quad (4.3.24)$$

Então

$$\mathbf{V} = \sum_{h=1}^u \sum_{k=1}^{m(h)} \alpha_k(h) \mathbf{Q}_k(h), \quad (4.3.25)$$

com as componentes de variância canônicas

$$\alpha_k(h) = \sum_{i=1}^{w(h)} \dot{\sigma}_i^2(h) b_{i,k}(h), \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 1, \dots, m(h). \quad (4.3.26)$$

Note-se que

$$\sum_{h=1}^u \sum_{k=1}^{m(h)} \mathbf{Q}_k(h) = \mathbf{I}_n,$$

pelo que a álgebra \underline{Q} é completa.

Considere-se agora

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^2 \quad (4.3.27)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}(u) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha}(h) = \begin{bmatrix} \alpha_1(h) \\ \vdots \\ \alpha_{m(h)}(h) \end{bmatrix} \quad , \quad h = 1, \dots, u \\ \\ \boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^2(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}^2(u) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}^2(h) = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1^2(h) \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_{w(h)}^2(h) \end{bmatrix} \quad , \quad h = 1, \dots, u \end{array} \right. \quad (4.3.28)$$

A matriz de transição é

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1u} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2u} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{B}_{u1} & \mathbf{B}_{u2} & \cdots & \mathbf{B}_{uu} \end{bmatrix} \quad (4.3.29)$$

com

$$\mathbf{B}_{i,j} = \begin{cases} a(j) \mathbf{1}_{w(i)} \boldsymbol{\delta}_{m(j)}^t & , \quad i < j \\ \mathbf{B}(i) & , \quad i = j \\ \mathbf{1}_{w(i)} \mathbf{1}_{m(j)}^t = \mathbf{J}_{w(i) \times m(j)} & , \quad i > j, \end{cases} \quad (4.3.30)$$

sendo a sua transposta

$$\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{11}]^t & [\mathbf{B}_{21}]^t & \cdots & [\mathbf{B}_{u1}]^t \\ [\mathbf{B}_{12}]^t & [\mathbf{B}_{22}]^t & \cdots & [\mathbf{B}_{u2}]^t \\ \vdots & & & \\ [\mathbf{B}_{1u}]^t & [\mathbf{B}_{2u}]^t & \cdots & [\mathbf{B}_{uu}]^t \end{bmatrix}. \quad (4.3.31)$$

Então pode escrever-se

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}(h) = [\mathbf{B}_{1h}]^t \boldsymbol{\sigma}^2(1) + \cdots + [\mathbf{B}_{hh}]^t \boldsymbol{\sigma}^2(h) + \cdots + [\mathbf{B}_{uh}]^t \boldsymbol{\sigma}^2(u), \quad (4.3.32)$$

ou

$$\boldsymbol{\alpha}(h) = \sum_{\ell=1}^u [\mathbf{B}_{\ell h}]^t \boldsymbol{\sigma}^2(\ell), \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.3.33)$$

Considere-se

$$\boldsymbol{\alpha}(h) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1(h) \\ \boldsymbol{\alpha}_2(h) \end{bmatrix} \quad (4.3.34)$$

com

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1(h) = \begin{bmatrix} \alpha_1(h) \end{bmatrix} & , \quad h = 1, \dots, u \\ \boldsymbol{\alpha}_2(h) = \begin{bmatrix} \alpha_2(h) \\ \vdots \\ \alpha_{m(h)}(h) \end{bmatrix} & , \quad h = 1, \dots, u \end{cases} \quad (4.3.35)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}^2(h) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^2(h) \\ \boldsymbol{\sigma}_2^2(h) \end{bmatrix} \quad (4.3.36)$$

com

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_1^2(h) = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1^2(h) \end{bmatrix} & , \quad h = 1, \dots, u \\ \boldsymbol{\sigma}_2^2(h) = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_2^2(h) \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_{w(h)}^2(h) \end{bmatrix} & , \quad h = 1, \dots, u. \end{cases} \quad (4.3.37)$$

Se considerarmos que a matriz

$$\mathbf{B}_{ij}^*, \quad i, j = 1, \dots, u$$

é uma matriz que se obtém retirando a 1ª linha e a 1ª coluna da matriz \mathbf{B}_{ij} , então podemos escrever

$$\boldsymbol{\alpha}_2(h) = \sum_{\ell=1}^u [\mathbf{B}_{\ell h}^*]^t \boldsymbol{\sigma}_2^2(\ell), \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.3.38)$$

Usando (4.3.30), tem-se

$$\boldsymbol{\alpha}_2(h) = [\mathbf{B}^*(h)]^t \boldsymbol{\sigma}_2^2(h) + \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \mathbf{1}_{m(h)-1}, \quad h = 1, \dots, u. \quad (4.3.39)$$

Se as matrizes $[\mathbf{B}^*(h)]$, $h = 1, \dots, u$, forem horizontalmente livres então

$$\boldsymbol{\sigma}_2^2(h) = ([\mathbf{B}^*(h)]^t)^+ \left[\boldsymbol{\alpha}_2(h) - \sum_{\ell=h+1}^u \sigma^2(\ell) \mathbf{1}_{m(h)-1} \right], \quad h = 1, \dots, u \quad (4.3.40)$$

e

$$\sigma^2(\ell) = \sum_{i=2}^{w(\ell)} \dot{\sigma}_i^2(\ell) = \mathbf{1}_{w(\ell)-1}^t \boldsymbol{\sigma}_2^2(\ell), \quad \ell = h+1, \dots, u, \quad (4.3.41)$$

pelo que a relação entre as componentes de variância iniciais e as canónicas, é a mesma que no modelo degrau a degrau.

Note-se que, se existir algum degrau h' em que existe apenas um factor, a expressão anterior é dada por

$$\sigma^2(h') = \dot{\sigma}_2^2(h') = \alpha_2(h') - \sum_{\ell=h'+1}^u \sigma^2(\ell), \quad h' = 1, \dots, u. \quad (4.3.42)$$

4.3.2 Estimação

Vejamos agora que, apesar de tanto o modelo como a abordagem serem diferentes da secção anterior, obtemos os mesmos estimadores para as componentes de variância canónicas que em (4.2.57).

Considerando os vectores

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(h) = \mathbf{A}_k(h)\mathbf{y}, \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 1, \dots, m(h) \quad (4.3.43)$$

e usando (4.3.7) e (4.3.25) podemos escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(h) \sim (\boldsymbol{\eta}_k(h); \alpha_k(h)\mathbf{I}_{g_k(h)}) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 1, \dots, m(h) \\ \boldsymbol{\eta}_k(h) = \mathbf{A}_k(h)\boldsymbol{\mu} \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 1, \dots, m(h) \\ g_k(h) = \text{car}(\mathbf{A}_k(h)) \quad , \quad h = 1, \dots, u \quad , \quad k = 2, \dots, m(h). \end{array} \right. \quad (4.3.44)$$

Como

$$E[\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(h)] = \mathbf{A}_k(h)E[\mathbf{y}] = \mathbf{A}_k(h)\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_{g_k(h)}, \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h), \quad (4.3.45)$$

então

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(h) \sim (\mathbf{0}_{g_k(h)}; \alpha_k(h)\mathbf{I}_{g_k(h)}) \quad , \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \quad (4.3.46)$$

Utilizando agora o mesmo procedimento, que permitiu encontrar (3.2.46), obtêm-se os estimadores centrados

$$\tilde{\alpha}_k(h) = \frac{\|\mathbf{A}_k(h)\mathbf{y}\|^2}{g_k(h)}, \quad h = 1, \dots, u, \quad k = 2, \dots, m(h). \quad (4.3.47)$$

Assim, $\tilde{\alpha}_k(h)$, $h = 1, \dots, u$, $k = 2, \dots, m(h)$, é um estimador centrado de $\alpha_k(h)$, $h = 1, \dots, u$, $k = 2, \dots, m(h)$, através do qual se obtêm estimadores centrados para $\dot{\sigma}_j^2(h)$ e $\sigma^2(h)$, $h = 1, \dots, u$, $j = 1, \dots, w(h)$.

Uma vez que

$$\dot{\mathbf{A}}_2(h)\mathbf{y}(h) = \mathbf{A}_2(h)\mathbf{y}, \quad h = 1, \dots, u \quad (4.3.48)$$

esta formulação conduz às mesmas estatísticas que a anterior, em que se utiliza o modelo degrau a degrau.

4.3.3 Exemplo de Aplicação

Nesta subsecção vamos voltar ao exemplo da subsecção 4.2.4. O procedimento que vamos agora utilizar é o do modelo global. Relembramos que, as componentes de variância que pretendemos estimar são

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2(A) \\ \sigma^2(B) \\ \sigma^2(C) \\ \sigma^2(D) \\ \sigma^2(CD). \end{array} \right. \quad (4.3.49)$$

De forma a calcular as matrizes de incidência para o modelo global vamos utilizar as matrizes já definidas na secção 4.2.4. Assim sendo, obtêm-se as matrizes de incidência

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_4) \\ \mathbf{X}(2) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{1}_4) \\ \mathbf{X}_1(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2) \\ \mathbf{X}_2(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{1}_2) \\ \mathbf{X}_3(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \\ \mathbf{X}_4(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2), \end{array} \right. \quad (4.3.50)$$

bem como as respectivas matrizes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(0) = D(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_4) \\ \mathbf{M}(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_4) \\ \mathbf{M}(2) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_4) \\ \mathbf{M}_1(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \\ \mathbf{M}_2(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \\ \mathbf{M}_3(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \\ \mathbf{M}_4(3) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) . \end{array} \right. \quad (4.3.51)$$

Também para as matrizes que constituem a álgebra de Jordan comutativa, a que o modelo global está associado, utilizamos as matrizes já calculadas na secção 4.2.4.

Seja \underline{Q} a base principal para o modelo global. Então

$$\underline{Q} = \{\mathbf{Q}_1(1), \mathbf{Q}_2(1), \mathbf{Q}_1(2), \mathbf{Q}_2(2), \mathbf{Q}_1(3), \mathbf{Q}_2(3), \mathbf{Q}_3(3), \mathbf{Q}_4(3)\} \quad (4.3.52)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_1(1) = D\left(\frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \\ \mathbf{Q}_2(1) = D(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{4 \times 4}) \\ \mathbf{Q}_1(2) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \\ \mathbf{Q}_2(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2, \mathbf{0}_{4 \times 4}) \\ \mathbf{Q}_1(3) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{2 \times 2}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \\ \mathbf{Q}_2(3) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{2 \times 2}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2\right) \\ \mathbf{Q}_3(3) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{2 \times 2}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \\ \mathbf{Q}_4(3) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{2 \times 2}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2) . \end{array} \right. \quad (4.3.53)$$

Tem-se ainda

$$\underline{Q}^{\frac{1}{2}} = \{\mathbf{A}_1(1), \mathbf{A}_2(1), \mathbf{A}_1(2), \mathbf{A}_2(2), \mathbf{A}_1(3), \mathbf{A}_2(3), \mathbf{A}_3(3), \mathbf{A}_4(3)\} \quad (4.3.54)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1(1) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t, \mathbf{0}_4^t \right] \\ \mathbf{A}_2(1) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \\ \mathbf{A}_1(2) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t, \mathbf{0}_4^t \right] \\ \mathbf{A}_2(2) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2, \mathbf{0}_4^t] \\ \mathbf{A}_1(3) = \left[\mathbf{0}_3^t, \mathbf{0}_2^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \\ \mathbf{A}_2(3) = \left[\mathbf{0}_3^t, \mathbf{0}_2^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \right] \\ \mathbf{A}_3(3) = \left[\mathbf{0}_3^t, \mathbf{0}_2^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \\ \mathbf{A}_4(3) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{0}_2^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \end{array} \right. \quad (4.3.55)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(1) = \text{car}(\mathbf{A}_1(1)) = 1 \\ g_2(1) = \text{car}(\mathbf{A}_2(1)) = 2 \\ g_1(2) = \text{car}(\mathbf{A}_1(2)) = 1 \\ g_2(2) = \text{car}(\mathbf{A}_2(2)) = 1 \\ g_1(3) = \text{car}(\mathbf{A}_1(3)) = 1 \\ g_2(3) = \text{car}(\mathbf{A}_2(3)) = 1 \\ g_3(3) = \text{car}(\mathbf{A}_3(3)) = 1 \\ g_4(3) = \text{car}(\mathbf{A}_4(3)) = 1. \end{array} \right. \quad (4.3.56)$$

Podemos agora escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(1) = \mathbf{Q}_1(1) + \mathbf{Q}_2(1) + 2\mathbf{Q}_1(2) + 0\mathbf{Q}_2(2) + 4\mathbf{Q}_1(3) + 0\mathbf{Q}_2(3) + 0\mathbf{Q}_3(3) + 0\mathbf{Q}_4(3) \\ \mathbf{M}(2) = \mathbf{Q}_1(1) + \mathbf{Q}_2(1) + \mathbf{Q}_1(2) + \mathbf{Q}_2(2) + 4\mathbf{Q}_1(3) + 0\mathbf{Q}_2(3) + 0\mathbf{Q}_3(3) + 0\mathbf{Q}_4(3) \\ \mathbf{M}_1(3) = \mathbf{Q}_1(1) + \mathbf{Q}_2(1) + \mathbf{Q}_1(2) + \mathbf{Q}_2(2) + 4\mathbf{Q}_1(3) + 0\mathbf{Q}_2(3) + 0\mathbf{Q}_3(3) + 0\mathbf{Q}_4(3) \\ \mathbf{M}_2(3) = \mathbf{Q}_1(1) + \mathbf{Q}_2(1) + \mathbf{Q}_1(2) + \mathbf{Q}_2(2) + 2\mathbf{Q}_1(3) + 0\mathbf{Q}_2(3) + 2\mathbf{Q}_3(3) + 0\mathbf{Q}_4(3) \\ \mathbf{M}_3(3) = \mathbf{Q}_1(1) + \mathbf{Q}_2(1) + \mathbf{Q}_1(2) + \mathbf{Q}_2(2) + 2\mathbf{Q}_1(3) + 2\mathbf{Q}_2(3) + 0\mathbf{Q}_3(3) + 0\mathbf{Q}_4(3) \\ \mathbf{M}_4(3) = \mathbf{Q}_1(1) + \mathbf{Q}_2(1) + \mathbf{Q}_1(2) + \mathbf{Q}_2(2) + \mathbf{Q}_1(3) + \mathbf{Q}_2(3) + \mathbf{Q}_3(3) + \mathbf{Q}_4(3) \end{array} \right. \quad (4.3.57)$$

pelo que a matriz de transição é

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.3.58)$$

Com

$$\mathbf{B}^*(3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.59)$$

tem-se

$$([\mathbf{B}^*(3)]^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.60)$$

Aplicando (4.3.40) para $h = 3$ tem-se

$$\tilde{\sigma}_2^2(3) = ([\mathbf{B}^*(3)]^t)^{-1} \tilde{\alpha}_2(3) \quad (4.3.61)$$

pelo que os estimadores para as componentes de variância dos factores do degrau $h = 3$ são as componentes do vector

$$\tilde{\sigma}_2^2(3) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^2(C) \\ \tilde{\sigma}^2(D) \\ \tilde{\sigma}^2(CD) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\dot{\sigma}_C^2}(3) \\ \widetilde{\dot{\sigma}_D^2}(3) \\ \widetilde{\dot{\sigma}_{CD}^2}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\alpha}_3(3) - \tilde{\alpha}_4(3)}{2} \\ \frac{\tilde{\alpha}_2(3) - \tilde{\alpha}_4(3)}{2} \\ \tilde{\alpha}_4(3) \end{bmatrix} \quad (4.3.62)$$

com

$$\tilde{\alpha}_k(3) = \|\mathbf{A}_k(3)\mathbf{y}\|^2, \quad k = 2, 3, 4. \quad (4.3.63)$$

Usando (4.3.42), os estimadores para as componentes de variância dos factores dos degraus $h = 2$ e $h = 1$ são, respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^2(B) = \dot{\tilde{\sigma}}_2^2(2) = \tilde{\alpha}_2(2) - \tilde{\sigma}^2(3), \text{ com } \tilde{\alpha}_2(2) = \frac{\|\mathbf{A}_2(2)\mathbf{y}\|^2}{g_2(2)} \\ \tilde{\sigma}^2(A) = \dot{\tilde{\sigma}}_2^2(1) = \tilde{\alpha}_2(1) - \sum_{l=2}^3 \tilde{\sigma}^2(l), \text{ com } \tilde{\alpha}_2(1) = \frac{\|\mathbf{A}_2(1)\mathbf{y}\|^2}{g_2(1)}, \end{array} \right. \quad (4.3.64)$$

onde

$$\tilde{\sigma}^2(h) = \sum_{i=2}^{w(h)} \dot{\tilde{\sigma}}_i^2(h) = \mathbf{1}_{w(h)-1} \tilde{\sigma}_2^2(h), \quad h = 2, 3. \quad (4.3.65)$$

Tal como anteriormente, este exemplo com o modelo global, mostra como calcular os estimadores para as componentes de variância do modelo da figura (4.2.1), para qualquer vector de observações \mathbf{y} definido em (4.2.81).

Capítulo 5

Cruzamento de Aninhamentos em Escada Estruturados

O algoritmo que vamos apresentar na secção 5.1 deste capítulo é geral e aplica-se ao cruzamento de quaisquer modelos. É de fácil aplicação, sendo que a dificuldade de análise resulta dos modelos em si e não do seu cruzamento.

Na secção 5.2 apresenta-se o caso particular do cruzamento de dois modelos com aninhamento em escada estruturados. Consideram-se os dois modelos definidos de acordo com o modelo global e apresenta-se ainda um exemplo de aplicação do cruzamento de dois modelos definidos com esta abordagem.

Resultante da existência de degraus, a que podem corresponder diferentes submodelos, o cruzamento pode ser definido à custa do cruzamento dos degraus dos diferentes modelos. Apesar de este tema ainda se encontrar em fase de desenvolvimento, apresentam-se já resultados referentes à utilização do cruzamento das álgebras dos vários degraus.

5.1 Resultados Gerais para o Cruzamento

Considerem-se dois modelos quaisquer e considere-se ainda que a cada modelo ℓ , $\ell = 1, 2$, correspondem as famílias

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M}(\ell) = \{\mathbf{M}_1(\ell), \dots, \mathbf{M}_{w(\ell)}(\ell)\} \\ \underline{Q}(\ell) = bp(\mathcal{A}(\ell)) = \{\mathbf{Q}_1(\ell), \dots, \mathbf{Q}_{m(\ell)}(\ell)\} \\ \underline{Q}^{\frac{1}{2}}(\ell) = \{\mathbf{A}_1(\ell), \dots, \mathbf{A}_{m(\ell)}(\ell)\} \end{array} \right. \quad (5.1.1)$$

e a matriz de transição $\mathbf{B}(\ell)$.

Quando se cruzam os dois modelos obtém-se, segundo [Mexia et al., 2010], um novo modelo com as famílias

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M} = \underline{M}(1) \otimes \underline{M}(2) \\ \underline{Q} = \underline{Q}(1) \otimes \underline{Q}(2) \\ \underline{Q}^{\frac{1}{2}} = \underline{Q}^{\frac{1}{2}}(1) \otimes \underline{Q}^{\frac{1}{2}}(2), \end{array} \right. \quad (5.1.2)$$

de acordo com a definição 2.5.1, e a matriz de transição

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(1) \otimes \mathbf{B}(2). \quad (5.1.3)$$

Admite-se também que, havendo $n(1)$ e $n(2)$ tratamentos nos dois modelos, no modelo obtido por cruzamento, os tratamentos estão ordenados de acordo com os índices

$$r = (r(1) - 1)n(2) + r(2), \quad r(\ell) = 1, \dots, n(\ell), \quad \ell = 1, 2 \quad (5.1.4)$$

onde

$$r = 1, \dots, n, \quad n = n(1) \times n(2) \quad (5.1.5)$$

Assim, é directo construir-se as famílias de matrizes necessárias à estimação.

Quando se cruzam não dois, mas sim L modelos o modelo do cruzamento passa a ter as famílias

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M} = \bigotimes_{\ell=1}^L \underline{M}(\ell) \\ \underline{Q} = \bigotimes_{\ell=1}^L \underline{Q}(\ell) \\ \underline{Q}^{\frac{1}{2}} = \bigotimes_{\ell=1}^L \underline{Q}^{\frac{1}{2}}(\ell) \end{array} \right. \quad (5.1.6)$$

e a matriz de transição

$$\mathbf{B} = \bigotimes_{\ell=1}^L \mathbf{B}(\ell). \quad (5.1.7)$$

Sendo $n(\ell)$, $\ell = 1, \dots, L$, o número de tratamentos em cada um dos ℓ modelos, tem-se que os tratamentos do modelo obtido por cruzamento estão ordenados de acordo com os índices

$$k = \sum_{\ell=1}^{L-1} \left[(k(\ell) - 1) \prod_{i=\ell+1}^L n(i) \right] + k(L), \quad k(\ell) = 1, \dots, n(\ell), \quad \ell = 1, \dots, L \quad (5.1.8)$$

onde

$$k = 1, \dots, n, \quad n = \prod_{\ell=1}^L n(\ell). \quad (5.1.9)$$

Tal como anteriormente, é directo construir-se as famílias de matrizes necessárias à estimação.

5.2 Cruzamento de Modelos Globais

O objectivo desta secção é apresentar o cruzamento de modelos com aninhamento em escada estruturado, considerando que cada modelo está definido de acordo com

a abordagem global. De acordo com a secção anterior, o cruzamento de modelos assenta no produto de Kronecker entre as famílias correspondentes aos vários modelos que se cruzam.

No caso dos modelos com aninhamento em escada estruturado, utilizando a abordagem do modelo global, o cruzamento é aplicação directa dos resultados apresentados na secção 4.3. Por forma a simplificar a aplicação dos resultados para o cruzamento, a notação que vamos utilizar é a da secção anterior. Nesta notação não se utiliza a informação por degrau.

Considerem-se dois modelos globais com aninhamento em escada estruturado. Cruzando os dois modelos obtêm-se as famílias \underline{M} , \underline{Q} e $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}$.

A família \underline{M} é constituída pelas matrizes

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i(1)}(1) \otimes \mathbf{M}_{i(2)}(2), \quad i = 1, \dots, w \quad (5.2.1)$$

com

$$\ell = 1, 2, \quad i(\ell) = 1, \dots, w(\ell), \quad w = w(1) \times w(2).$$

e cada uma das matrizes

$$\mathbf{M}_{i(\ell)}(\ell), \quad \ell = 1, 2, \quad i(\ell) = 1, \dots, w(\ell) \quad (5.2.2)$$

é uma matriz diagonal por blocos.

A família \underline{Q} é constituída pelas matrizes

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k(1)}(1) \otimes \mathbf{Q}_{k(2)}(2), \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.2.3)$$

com

$$\ell = 1, 2, \quad k(\ell) = 1, \dots, m(\ell), \quad m = m(1) \times m(2)$$

e cada uma das matrizes

$$\mathbf{Q}_{k(\ell)}(\ell), \quad \ell = 1, 2, \quad k(\ell) = 1, \dots, m(\ell) \quad (5.2.4)$$

é uma matriz diagonal por blocos, com todos os blocos nulos com excepção de um.

Tem-se ainda a família $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}$ constituída pelas matrizes

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k(1)}(1) \otimes \mathbf{A}_{k(2)}(2), \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.2.5)$$

com

$$\ell = 1, 2, \quad k(\ell) = 1, \dots, m(\ell), \quad m = m(1) \times m(2)$$

e cada uma das matrizes

$$A_{k(\ell)}(\ell), \quad \ell = 1, 2, \quad k(\ell) = 1, \dots, m(\ell) \quad (5.2.6)$$

é uma matriz linha por blocos, com todos os blocos nulos com excepção de um.

A matriz de transição do cruzamento é

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(1) \otimes \mathbf{B}(2). \quad (5.2.7)$$

Considerando agora que, para $\ell = 1, 2$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^2(\ell) = [\sigma_1^2(\ell) \cdots \sigma_{w(\ell)}^2(\ell)]^t \\ \boldsymbol{\gamma}(\ell) = [\gamma_1(\ell) \cdots \gamma_{m(\ell)}(\ell)]^t \end{cases} \quad (5.2.8)$$

tem-se que

$$\boldsymbol{\gamma}(\ell) = \mathbf{B}^t(\ell) \boldsymbol{\sigma}^2(\ell), \quad \ell = 1, 2. \quad (5.2.9)$$

Para o cruzamento dos dois modelos, considerando

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma}^2(1) \otimes \boldsymbol{\sigma}^2(2) \\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(1) \otimes \boldsymbol{\gamma}(2) \end{cases} \quad (5.2.10)$$

e \mathbf{B} a matriz definida em (5.2.7), podemos escrever

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^2, \quad (5.2.11)$$

onde

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^2 = [\sigma_i^2] & , \quad i = 1, \dots, w \\ \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_k] & , \quad k = 1, \dots, m \end{cases} \quad (5.2.12)$$

e

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = \sigma_{i(1)}^2(1) \times \sigma_{i(2)}^2(2) & , \quad i = (i(1) - 1)w(2) + i(2) \\ \gamma_k = \gamma_{k(1)}(1) \times \gamma_{k(2)}(2) & , \quad k = (k(1) - 1)m(2) + k(2). \end{cases} \quad (5.2.13)$$

Se a matriz \mathbf{B} for horizontalmente livre então

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = [\mathbf{B}^t]^+ \boldsymbol{\gamma}. \quad (5.2.14)$$

A estimação das componentes de variância iniciais, σ_i^2 , $i = 1, \dots, w$, é feita da forma habitual já apresentada nos capítulos anteriores, começando por se estimarem as componentes de variância canónicas, γ_k , $k = 1, \dots, m$.

Admitindo

$$\mathbf{A}_k \mathbf{y} \sim (\mu_{g_k}; \gamma_k \mathbf{I}_{g_k}), \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.2.15)$$

com $g_k = \text{car}(\mathbf{A}_k)$, tem-se o estimador centrado

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{\|\mathbf{A}_k \mathbf{y}\|^2}{g_k}, \quad k \in \mathcal{C}, \quad (5.2.16)$$

onde

$$\mathcal{C} = \{k = 1, \dots, m : E[\mathbf{A}_k \mathbf{y}] = \mathbf{0}_{g_k}\}. \quad (5.2.17)$$

De modo a obter o vector dos tratamentos, do cruzamento dos dois modelos, considera-se que para cada tratamento do 1º modelo se tem um subvector com

os tratamentos do 2º modelo. Sendo $n(\ell)$, $\ell = 1, 2$, o número de tratamentos do ℓ -ésimo modelo, podemos escrever o vector das observações como

$$\mathbf{y}_{n(1)n(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n(1))} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,n(2)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{2,n(2)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} y_{n(1),1} \\ \vdots \\ y_{n(1),n(2)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.2.18)$$

onde y_{ij} representa a observação em que se cruza o tratamento i do 1º modelo com tratamento j do 2º modelo, $i = 1, \dots, n(1)$, $j = 1, \dots, n(2)$.

Note-se que, será necessário alterar ainda a matriz e os vectores em (5.2.14) de forma a ficarem coerentes com as respectivas componentes de variância, veja-se (5.2.53), no exemplo de aplicação da subsecção seguinte.

5.2.1 Exemplo de Aplicação

Considere-se o cruzamento de dois modelos com aninhamento em escada estruturado, conforme figura 5.2.1. A abordagem utilizada é a da secção anterior e considera-se que os factores são de efeitos aleatórios.

No modelo 1 tem-se um aninhamento com dois degraus. O primeiro degrau tem o factor A com três níveis, que aninha no segundo degrau um submodelo com o cruzamento dos factores B e C, cada um com dois níveis. Este modelo tem $n(1) = 7$ tratamentos. No modelo 2, também se tem um aninhamento com dois degraus. No

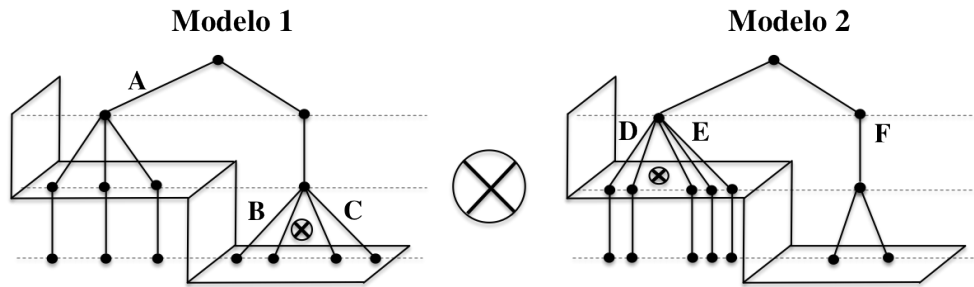


Figura 5.2.1: Cruzamento de dois modelos com aninhamento em escada estruturado

primeiro degrau tem-se um submodelo com cruzamento de dois factores D e E. O factor D tem dois níveis e o factor E tem três. Este submodelo aninha no segundo degrau o factor F com dois níveis. Este modelo tem $n(2) = 8$ tratamentos.

Caso o cruzamento considerado fosse de modelos com aninhamento equilibrado teriam-se $(3 \times 4 \times 6 \times 2) = 144$ tratamentos. Neste caso, o cruzamento de aninhamentos em escada, tem $n = (7 \times 8) = 56$ tratamentos. A figura 5.2.2 apresenta os efeitos para os vários modelos.

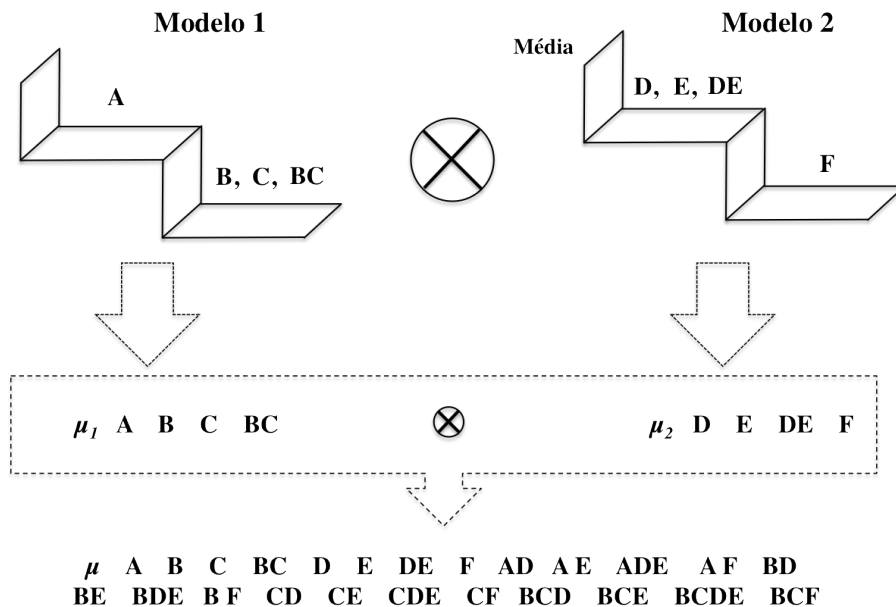


Figura 5.2.2: Efeitos para os vários modelos

As famílias $\underline{X}(\ell)$, $\ell = 1, 2$, são

$$\underline{X}(1) = \{\mathbf{X}_1(1), \mathbf{X}_2(1), \mathbf{X}_3(1), \mathbf{X}_4(1), \mathbf{X}_5(1)\} \quad (5.2.19)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_1(1) = D(\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_4) \\ \mathbf{X}_2(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{1}_4) \\ \mathbf{X}_3(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \\ \mathbf{X}_4(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{1}_2) \\ \mathbf{X}_5(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \end{array} \right. \quad (5.2.20)$$

e

$$\underline{X}(2) = \{\mathbf{X}_1(2), \mathbf{X}_2(2), \mathbf{X}_3(2), \mathbf{X}_4(2), \mathbf{X}_5(2)\} \quad (5.2.21)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_1(2) = D(\mathbf{1}_6, \mathbf{1}_2) \\ \mathbf{X}_2(2) = D(\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{1}_2) \\ \mathbf{X}_3(2) = D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{1}_3, \mathbf{1}_2) \\ \mathbf{X}_4(2) = D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{1}_2) \\ \mathbf{X}_5(2) = D(\mathbf{I}_6, \mathbf{I}_2) . \end{array} \right. \quad (5.2.22)$$

Com

$$\mathbf{M}_{i(\ell)}(\ell) = \mathbf{X}_{i(\ell)}(\ell) \mathbf{X}_{i(\ell)}^t(\ell) , \ell = 1, 2 , i(\ell) = 1, \dots, 5$$

, as famílias $\underline{M}(\ell)$, $\ell = 1, 2$, são

$$\underline{M}(1) = \{\mathbf{M}_1(1), \mathbf{M}_2(1), \mathbf{M}_3(1), \mathbf{M}_4(1), \mathbf{M}_5(1)\} \quad (5.2.23)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_1(1) = D(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4) \\ \mathbf{M}_2(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_4) \\ \mathbf{M}_3(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \\ \mathbf{M}_4(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \\ \mathbf{M}_5(1) = D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \end{array} \right. \quad (5.2.24)$$

e

$$\underline{M}(2) = \{\mathbf{M}_1(2), \mathbf{M}_2(2), \mathbf{M}_3(2), \mathbf{M}_4(2), \mathbf{M}_5(2)\} \quad (5.2.25)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_1(2) = D(\mathbf{J}_6, \mathbf{J}_2) \\ \mathbf{M}_2(2) = D(\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2) \\ \mathbf{M}_3(2) = D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_2) \\ \mathbf{M}_4(2) = D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2) \\ \mathbf{M}_5(2) = D(\mathbf{I}_6, \mathbf{I}_2) . \end{array} \right. \quad (5.2.26)$$

As famílias $\underline{Q}(\ell)$, $\ell = 1, 2$, são

$$\underline{Q}(1) = \{\mathbf{Q}_1(1), \mathbf{Q}_2(1), \mathbf{Q}_3(1), \mathbf{Q}_4(1), \mathbf{Q}_5(1), \mathbf{Q}_6(1)\} \quad (5.2.27)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_1(1) = D \left(\frac{1}{3} \mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4} \right) \\ \mathbf{Q}_2(1) = D \left(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4} \right) \\ \mathbf{Q}_3(1) = D \left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \right) \\ \mathbf{Q}_4(1) = D \left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2 \right) \\ \mathbf{Q}_5(1) = D \left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \right) \\ \mathbf{Q}_6(1) = D \left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2 \right) \end{array} \right. \quad (5.2.28)$$

e

$$\underline{Q}(2) = \{\mathbf{Q}_1(2), \mathbf{Q}_2(2), \mathbf{Q}_3(2), \mathbf{Q}_4(2), \mathbf{Q}_5(2), \mathbf{Q}_6(2)\} \quad (5.2.29)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_1(2) = D \left(\frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{3} \mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right) \\ \mathbf{Q}_2(2) = D \left(\frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right) \\ \mathbf{Q}_3(2) = D \left(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3} \mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right) \\ \mathbf{Q}_4(2) = D \left(\mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right) \\ \mathbf{Q}_5(2) = D \left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \frac{1}{2} \mathbf{J}_2 \right) \\ \mathbf{Q}_6(2) = D \left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_2 \right) . \end{array} \right. \quad (5.2.30)$$

Têm-se ainda as famílias $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}(\ell)$, $\ell = 1, 2$, dadas por

$$\underline{Q}^{\frac{1}{2}}(1) = \{\mathbf{A}_1(1), \mathbf{A}_2(1), \mathbf{A}_3(1), \mathbf{A}_4(1), \mathbf{A}_5(1), \mathbf{A}_6(1)\} \quad (5.2.31)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1(1) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_4^t \right] \\ \mathbf{A}_2(1) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \\ \mathbf{A}_3(1) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \\ \mathbf{A}_4(1) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \right] \\ \mathbf{A}_5(1) = \left[\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \\ \mathbf{A}_6(1) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \end{array} \right. \quad (5.2.32)$$

e

$$\underline{Q}^{\frac{1}{2}}(2) = \{\mathbf{A}_1(2), \mathbf{A}_2(2), \mathbf{A}_3(2), \mathbf{A}_4(2), \mathbf{A}_5(2), \mathbf{A}_6(2)\} \quad (5.2.33)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right] \\ \mathbf{A}_2(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right] \\ \mathbf{A}_3(2) = \left[\mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right] \\ \mathbf{A}_4(2) = [\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}] \\ \mathbf{A}_5(2) = \left[\mathbf{0}_6^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \\ \mathbf{A}_6(2) = [\mathbf{0}_6^t, \mathbf{T}_2] . \end{array} \right. \quad (5.2.34)$$

Tome-se

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}. \quad (5.2.35)$$

Sendo

$$g_{k(\ell)}(\ell) = \text{car}(\mathbf{A}_{k(\ell)}(\ell)), \quad \ell = 1, 2, \quad k(\ell) = 1, \dots, 6,$$

têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(1) = 1 \\ g_2(1) = 2 \\ g_3(1) = 1 \\ g_4(1) = 1 \\ g_5(1) = 1 \\ g_6(1) = 1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1(2) = 1 \\ g_2(2) = 2 \\ g_3(2) = 1 \\ g_4(2) = 2 \\ g_5(2) = 1 \\ g_6(2) = 1. \end{array} \right. \quad (5.2.36)$$

Com a matriz de transição

$$\mathbf{B}(1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.37)$$

podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(1) \\ \gamma_2(1) \\ \gamma_3(1) \\ \gamma_4(1) \\ \gamma_5(1) \\ \gamma_6(1) \end{bmatrix} = \mathbf{B}^t(1) \begin{bmatrix} \sigma_1^2(1) \\ \sigma_2^2(1) \\ \sigma_3^2(1) \\ \sigma_4^2(1) \\ \sigma_5^2(1) \end{bmatrix}. \quad (5.2.38)$$

Com a matriz de transição

$$\mathbf{B}(2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.39)$$

podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(2) \\ \gamma_2(2) \\ \gamma_3(2) \\ \gamma_4(2) \\ \gamma_5(2) \\ \gamma_6(2) \end{bmatrix} = \mathbf{B}^t(2) \begin{bmatrix} \sigma_1^2(2) \\ \sigma_2^2(2) \\ \sigma_3^2(2) \\ \sigma_4^2(2) \\ \sigma_5^2(2) \end{bmatrix}. \quad (5.2.40)$$

Quando cruzamos os dois modelos obtemos as famílias \underline{M} , \underline{Q} e $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}$ definidas, respectivamente, como

$$\underline{M} = \underline{M}(1) \otimes \underline{M}(2) = \{ \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i(1)}(1) \otimes \mathbf{M}_{i(2)}(2) : i(1), i(2) = 1, \dots, 5 \}, \quad (5.2.41)$$

com índices

$$i = (i(1) - 1) \times 5 + i(2), \quad i = 1, \dots, 25,$$

$$\underline{Q} = Q(1) \otimes Q(2) = \{ \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k(1)}(1) \otimes \mathbf{Q}_{k(2)}(2) : k(1), k(2) = 1, \dots, 6 \} \quad (5.2.42)$$
$$k = (k(1) - 1) \times 6 + k(2), \quad k = 1, \dots, 36,$$
$$Q^{\frac{1}{2}} = Q^{\frac{1}{2}}(1) \otimes Q^{\frac{1}{2}}(2) = \{ \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k(1)}(1) \otimes \mathbf{A}_{k(2)}(2) : k(1), k(2) = 1, \dots, 6 \} \quad (5.2.43)$$
$$k = (k(1) - 1) \times 6 + k(2), \quad k = 1, \dots, 36,$$

Têm-se ainda os graus de liberdade

$$g_k = g_{k(1)}(1) \times g_{k(2)}(2), k = 1, \dots, 36, k(1) = 1, \dots, 6, k(2) = 1, \dots, 6 \quad (5.2.44)$$

$$k = (k(1) - 1) \times 6 + k(2), \quad k = 1, \dots, 36,$$

A matriz de transição do cruzamento é dada por

[illegible]

Considerando

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^2 = [\sigma_1^2 \cdots \sigma_{25}^2]^t \\ \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \cdots \gamma_{36}]^t \end{cases} \quad (5.2.46)$$

tem-se que

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^2. \quad (5.2.47)$$

Considere-se que o vector de observações é dado por

$$\mathbf{y}_{56} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,8} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{2,8} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} y_{7,1} \\ \vdots \\ y_{7,8} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (5.2.48)$$

Como

$$\begin{cases} \mathbf{A}_k \mathbf{y} \sim (\mathbf{0}_{g_k}; \gamma_k \mathbf{I}_{g_k}) , \quad k \in \mathcal{C} \\ \mathcal{C} = \{k : E[\mathbf{A}_k \mathbf{y}] = \mathbf{0}_{g_k}\} \\ g_k = \text{car}(\mathbf{A}_k) , \quad k \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (5.2.49)$$

então tem-se o estimador centrado

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{\|\mathbf{A}_k \mathbf{y}\|^2}{g_k}, \quad k \in \mathcal{C}. \quad (5.2.50)$$

Como não se estimam as componentes de variância canônicas $\gamma_1, \gamma_5, \gamma_{13}, \gamma_{17}$ e a componente de variância inicial $\sigma_1^2 = 0$, então em vez de (5.2.47) tem-se

$$\tilde{\gamma}_* = (\mathbf{B}_*)^t \tilde{\sigma}_*^2 \quad (5.2.51)$$

com

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_* = [\tilde{\gamma}_k], \quad k \in \mathcal{C} \\ \tilde{\sigma}_*^2 = [\tilde{\sigma}_2^2 \cdots \tilde{\sigma}_{25}^2]^t \end{cases} \quad (5.2.52)$$

e \mathbf{B}_* a matriz que se obtém retirando da matriz \mathbf{B} as colunas relativas a $\gamma_1, \gamma_5, \gamma_{13}, \gamma_{17}$ bem como a 1ª linha. Se a matriz \mathbf{B}_* for horizontalmente livre então

$$\tilde{\sigma}_*^2 = [(\mathbf{B}_*)^t]^+ \tilde{\gamma}_*. \quad (5.2.53)$$

É agora possível calcular estimadores centrados que são solução dos sistema (5.2.53), para um qualquer vector \mathbf{y} , definido em (5.2.48).

Tabela 5.2.1: Matrizes da família \underline{M}

$i(1)$	$i(2)$	i	\mathbf{M}_i	Efeitos
1	1	1	$D(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{J}_6, \mathbf{J}_2)$	μ
1	2	2	$D(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	E
1	3	3	$D(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_2)$	D
1	4	4	$D(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	DE
1	5	5	$D(\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{I}_6, \mathbf{I}_2)$	F
2	1	6	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{J}_6, \mathbf{J}_2)$	A
2	2	7	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	AE
2	3	8	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_2)$	AD
2	4	9	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	ADE
2	5	10	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_4) \otimes D(\mathbf{I}_6, \mathbf{I}_2)$	AF
3	1	11	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{J}_6, \mathbf{J}_2)$	C
3	2	12	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	CE
3	3	13	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_2)$	CD
3	4	14	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	CDE
3	5	15	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{I}_6, \mathbf{I}_2)$	CF
4	1	16	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{J}_6, \mathbf{J}_2)$	B
4	2	17	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	BE
4	3	18	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_2)$	BD
4	4	19	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	BDE
4	5	20	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{I}_6, \mathbf{I}_2)$	BF
5	1	21	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{J}_6, \mathbf{J}_2)$	BC
5	2	22	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	BCE
5	3	23	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_2)$	BCD
5	4	24	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3, \mathbf{J}_2)$	BCDE
5	5	25	$D(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \otimes D(\mathbf{I}_6, \mathbf{I}_2)$	BCF

Tabela 5.2.2: Matrizes da família \underline{Q}

$k(1)$	$k(2)$	k	\mathbf{Q}_k
1	1	1	$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1(1) \otimes \mathbf{Q}_1(2) = D\left(\frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
1	2	2	$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1(1) \otimes \mathbf{Q}_2(2) = D\left(\frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
1	3	3	$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1(1) \otimes \mathbf{Q}_3(2) = D\left(\frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
1	4	4	$\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_1(1) \otimes \mathbf{Q}_4(2) = D\left(\frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
1	5	5	$\mathbf{Q}_5 = \mathbf{Q}_1(1) \otimes \mathbf{Q}_5(2) = D\left(\frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right)$
1	6	6	$\mathbf{Q}_6 = \mathbf{Q}_1(1) \otimes \mathbf{Q}_6(2) = D\left(\frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_2\right)$
2	1	7	$\mathbf{Q}_7 = \mathbf{Q}_2(1) \otimes \mathbf{Q}_1(2) = D\left(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
2	2	8	$\mathbf{Q}_8 = \mathbf{Q}_2(1) \otimes \mathbf{Q}_2(2) = D\left(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
2	3	9	$\mathbf{Q}_9 = \mathbf{Q}_2(1) \otimes \mathbf{Q}_3(2) = D\left(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
2	4	10	$\mathbf{Q}_{10} = \mathbf{Q}_2(1) \otimes \mathbf{Q}_4(2) = D\left(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
2	5	11	$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_2(1) \otimes \mathbf{Q}_5(2) = D\left(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right)$
2	6	12	$\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_2(1) \otimes \mathbf{Q}_6(2) = D\left(\mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{4 \times 4}\right) \otimes D\left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_2\right)$
3	1	13	$\mathbf{Q}_{13} = \mathbf{Q}_3(1) \otimes \mathbf{Q}_1(2) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
3	2	14	$\mathbf{Q}_{14} = \mathbf{Q}_3(1) \otimes \mathbf{Q}_2(2) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
3	3	15	$\mathbf{Q}_{15} = \mathbf{Q}_3(1) \otimes \mathbf{Q}_3(2) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \otimes D\left(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
3	4	16	$\mathbf{Q}_{16} = \mathbf{Q}_3(1) \otimes \mathbf{Q}_4(2) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \otimes D\left(\mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}\right)$
3	5	17	$\mathbf{Q}_{17} = \mathbf{Q}_3(1) \otimes \mathbf{Q}_5(2) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \otimes D\left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right)$
3	6	18	$\mathbf{Q}_{18} = \mathbf{Q}_3(1) \otimes \mathbf{Q}_6(2) = D\left(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2\right) \otimes D\left(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_2\right)$

Tabela 5.2.3: Matrizes da família \underline{Q} (Continuação da tabela anterior)

$k(1)$	$k(2)$	k	\mathbf{Q}_k
4	1	19	$\mathbf{Q}_{19} = \mathbf{Q}_4(1) \otimes \mathbf{Q}_1(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
4	2	20	$\mathbf{Q}_{20} = \mathbf{Q}_4(1) \otimes \mathbf{Q}_2(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
4	3	21	$\mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_4(1) \otimes \mathbf{Q}_3(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
4	4	22	$\mathbf{Q}_{22} = \mathbf{Q}_4(1) \otimes \mathbf{Q}_4(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
4	5	23	$\mathbf{Q}_{23} = \mathbf{Q}_4(1) \otimes \mathbf{Q}_5(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2)$
4	6	24	$\mathbf{Q}_{24} = \mathbf{Q}_4(1) \otimes \mathbf{Q}_6(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_2)$
5	1	25	$\mathbf{Q}_{25} = \mathbf{Q}_5(1) \otimes \mathbf{Q}_1(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes D(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
5	2	26	$\mathbf{Q}_{26} = \mathbf{Q}_5(1) \otimes \mathbf{Q}_2(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes D(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
5	3	27	$\mathbf{Q}_{27} = \mathbf{Q}_5(1) \otimes \mathbf{Q}_3(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
5	4	28	$\mathbf{Q}_{28} = \mathbf{Q}_5(1) \otimes \mathbf{Q}_4(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
5	5	29	$\mathbf{Q}_{29} = \mathbf{Q}_5(1) \otimes \mathbf{Q}_5(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2)$
5	6	30	$\mathbf{Q}_{30} = \mathbf{Q}_5(1) \otimes \mathbf{Q}_6(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{2}\mathbf{J}_2) \otimes D(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_2)$
6	1	31	$\mathbf{Q}_{31} = \mathbf{Q}_6(1) \otimes \mathbf{Q}_1(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
6	2	32	$\mathbf{Q}_{32} = \mathbf{Q}_6(1) \otimes \mathbf{Q}_2(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\frac{1}{2}\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
6	3	33	$\mathbf{Q}_{33} = \mathbf{Q}_6(1) \otimes \mathbf{Q}_3(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{K}_2 \otimes \frac{1}{3}\mathbf{J}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
6	4	34	$\mathbf{Q}_{34} = \mathbf{Q}_6(1) \otimes \mathbf{Q}_4(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2})$
6	5	35	$\mathbf{Q}_{35} = \mathbf{Q}_6(1) \otimes \mathbf{Q}_5(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \frac{1}{2}\mathbf{J}_2)$
6	6	36	$\mathbf{Q}_{36} = \mathbf{Q}_6(1) \otimes \mathbf{Q}_6(2) = D(\mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{K}_2) \otimes D(\mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_2)$

Tabela 5.2.4: Matrizes da família $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}$

$k(1)$	$k(2)$	k	\mathbf{A}_k
1	1	1	$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1(1) \otimes \mathbf{A}_1(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_4^t \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right]$
1	2	2	$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1(1) \otimes \mathbf{A}_2(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_4^t \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right]$
1	3	3	$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1(1) \otimes \mathbf{A}_3(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_4^t \right] \otimes \left[\mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right]$
1	4	4	$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1(1) \otimes \mathbf{A}_4(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_4^t \right] \otimes [\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}]$
1	5	5	$\mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_1(1) \otimes \mathbf{A}_5(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_4^t \right] \otimes \left[\mathbf{0}_6^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right]$
1	6	6	$\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_1(1) \otimes \mathbf{A}_6(2) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_4^t \right] \otimes [\mathbf{0}_6^t, \mathbf{T}_2]$
2	1	7	$\mathbf{A}_7 = \mathbf{A}_2(1) \otimes \mathbf{A}_1(2) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right]$
2	2	8	$\mathbf{A}_8 = \mathbf{A}_2(1) \otimes \mathbf{A}_2(2) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right]$
2	3	9	$\mathbf{A}_9 = \mathbf{A}_2(1) \otimes \mathbf{A}_3(2) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \otimes \left[\mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right]$
2	4	10	$\mathbf{A}_{10} = \mathbf{A}_2(1) \otimes \mathbf{A}_4(2) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \otimes [\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}]$
2	5	11	$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_2(1) \otimes \mathbf{A}_5(2) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \otimes \left[\mathbf{0}_6^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right]$
2	6	12	$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_2(1) \otimes \mathbf{A}_6(2) = [\mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 4}] \otimes [\mathbf{0}_6^t, \mathbf{T}_2]$
3	1	13	$\mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_3(1) \otimes \mathbf{A}_1(2) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right]$
3	2	14	$\mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_3(1) \otimes \mathbf{A}_2(2) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \right]$
3	3	15	$\mathbf{A}_{15} = \mathbf{A}_3(1) \otimes \mathbf{A}_3(2) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \otimes \left[\mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \right]$
3	4	16	$\mathbf{A}_{16} = \mathbf{A}_3(1) \otimes \mathbf{A}_4(2) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \otimes [\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}]$
3	5	17	$\mathbf{A}_{17} = \mathbf{A}_3(1) \otimes \mathbf{A}_5(2) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \otimes \left[\mathbf{0}_6^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right]$
3	6	18	$\mathbf{A}_{18} = \mathbf{A}_3(1) \otimes \mathbf{A}_6(2) = \left[\mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \right] \otimes [\mathbf{0}_6^t, \mathbf{T}_2]$

Tabela 5.2.5: Matrizes da família $\underline{Q}^{\frac{1}{2}}$ (Continuação da tabela anterior)

$k(1)$	$k(2)$	k	\mathbf{A}_k
4	1	19	$\mathbf{A}_{19} = \mathbf{A}_4(1) \otimes \mathbf{A}_1(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \end{bmatrix}$
4	2	20	$\mathbf{A}_{20} = \mathbf{A}_4(1) \otimes \mathbf{A}_2(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$
4	3	21	$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_4(1) \otimes \mathbf{A}_3(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \end{bmatrix}$
4	4	22	$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_4(1) \otimes \mathbf{A}_4(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \otimes [\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}]$
4	5	23	$\mathbf{A}_{23} = \mathbf{A}_4(1) \otimes \mathbf{A}_5(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix}$
4	6	24	$\mathbf{A}_{24} = \mathbf{A}_4(1) \otimes \mathbf{A}_6(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \otimes [\mathbf{0}_6^t, \mathbf{T}_2]$
5	1	25	$\mathbf{A}_{25} = \mathbf{A}_5(1) \otimes \mathbf{A}_1(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \end{bmatrix}$
5	2	26	$\mathbf{A}_{26} = \mathbf{A}_5(1) \otimes \mathbf{A}_2(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$
5	3	27	$\mathbf{A}_{27} = \mathbf{A}_5(1) \otimes \mathbf{A}_3(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \end{bmatrix}$
5	4	28	$\mathbf{A}_{28} = \mathbf{A}_5(1) \otimes \mathbf{A}_4(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix} \otimes [\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}]$
5	5	29	$\mathbf{A}_{29} = \mathbf{A}_5(1) \otimes \mathbf{A}_5(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix}$
5	6	30	$\mathbf{A}_{30} = \mathbf{A}_5(1) \otimes \mathbf{A}_6(2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix} \otimes [\mathbf{0}_6^t, \mathbf{T}_2]$
6	1	31	$\mathbf{A}_{31} = \mathbf{A}_6(1) \otimes \mathbf{A}_1(2) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \end{bmatrix}$
6	2	32	$\mathbf{A}_{32} = \mathbf{A}_6(1) \otimes \mathbf{A}_2(2) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$
6	3	33	$\mathbf{A}_{33} = \mathbf{A}_6(1) \otimes \mathbf{A}_3(2) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_3^t, \mathbf{0}_2^t \end{bmatrix}$
6	4	34	$\mathbf{A}_{34} = \mathbf{A}_6(1) \otimes \mathbf{A}_4(2) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \otimes [\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_3, \mathbf{0}_{2 \times 2}]$
6	5	35	$\mathbf{A}_{35} = \mathbf{A}_6(1) \otimes \mathbf{A}_5(2) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix}$
6	6	36	$\mathbf{A}_{36} = \mathbf{A}_6(1) \otimes \mathbf{A}_6(2) = [\mathbf{0}_3^t, \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2] \otimes [\mathbf{0}_6^t, \mathbf{T}_2]$

Tabela 5.2.6: Graus de liberdade do cruzamento

$k(1)$	$k(2)$	k	g_k
1	1	1	$g_1 = g_1(1) \times g_1(2) = 1$
1	2	2	$g_2 = g_1(1) \times g_2(2) = 2$
1	3	3	$g_3 = g_1(1) \times g_3(2) = 1$
1	4	4	$g_4 = g_1(1) \times g_4(2) = 2$
1	5	5	$g_5 = g_1(1) \times g_5(2) = 1$
1	6	6	$g_6 = g_1(1) \times g_6(2) = 1$
2	1	7	$g_7 = g_2(1) \times g_1(2) = 2$
2	2	8	$g_8 = g_2(1) \times g_2(2) = 4$
2	3	9	$g_9 = g_2(1) \times g_3(2) = 2$
2	4	10	$g_{10} = g_2(1) \times g_4(2) = 4$
2	5	11	$g_{11} = g_2(1) \times g_5(2) = 2$
2	6	12	$g_{12} = g_2(1) \times g_6(2) = 2$
3	1	13	$g_{13} = g_3(1) \times g_1(2) = 1$
3	2	14	$g_{14} = g_3(1) \times g_2(2) = 2$
3	3	15	$g_{15} = g_3(1) \times g_3(2) = 1$
3	4	16	$g_{16} = g_3(1) \times g_4(2) = 2$
3	5	17	$g_{17} = g_3(1) \times g_5(2) = 1$
3	6	18	$g_{18} = g_3(1) \times g_6(2) = 1$

Tabela 5.2.7: Graus de liberdade do cruzamento (Continuação da tabela anterior)

$k(1)$	$k(2)$	k	g_k
4	1	19	$g_{19} = g_4(1) \times g_1(2) = 1$
4	2	20	$g_{20} = g_4(1) \times g_2(2) = 2$
4	3	21	$g_{21} = g_4(1) \times g_3(2) = 1$
4	4	22	$g_{22} = g_4(1) \times g_4(2) = 2$
4	5	23	$g_{23} = g_4(1) \times g_5(2) = 1$
4	6	24	$g_{24} = g_4(1) \times g_6(2) = 1$
5	1	25	$g_{25} = g_5(1) \times g_1(2) = 1$
5	2	26	$g_{26} = g_5(1) \times g_2(2) = 2$
5	3	27	$g_{27} = g_5(1) \times g_3(2) = 1$
5	4	28	$g_{28} = g_5(1) \times g_4(2) = 2$
5	5	29	$g_{29} = g_5(1) \times g_5(2) = 1$
5	6	30	$g_{30} = g_5(1) \times g_6(2) = 1$
6	1	31	$g_{31} = g_6(1) \times g_1(2) = 1$
6	2	32	$g_{32} = g_6(1) \times g_2(2) = 2$
6	3	33	$g_{33} = g_6(1) \times g_3(2) = 1$
6	4	34	$g_{34} = g_6(1) \times g_4(2) = 2$
6	5	35	$g_{35} = g_6(1) \times g_5(2) = 1$
6	6	36	$g_{36} = g_6(1) \times g_6(2) = 1$

5.3 Cruzamento de Modelos Degrau a Degrau

Vamos ver agora que a estimação das componentes de variância canónicas pode ser feita sem recorrer às álgebras globais de cada modelo que vamos cruzar. Como as matrizes que constituem estas álgebras são diagonais por blocos, com apenas um bloco principal não nulo, e o facto da operação que é usada entre elas ser produto de Kronecker, permitem uma abordagem diferente da anterior. Em vez do cruzamento das álgebras globais de cada um dos modelos com aninhamento em escada estruturado, vamos ver que é possível cruzar as álgebras de grau a grau. Para isso comecemos por alterar a notação anteriormente utilizada de forma a permitir usar a informação sobre os degraus.

Considerem-se L modelos com aninhamento em escada estruturado. Representando por \mathcal{A}_ℓ a álgebra de Jordan comutativa correspondente ao ℓ -ésimo modelo, $\ell = 1, \dots, L$, e por $\mathcal{A}_{\ell,h}$ a álgebra de Jordan comutativa correspondente ao h -ésimo degrau do ℓ -ésimo modelo, $\ell = 1, \dots, L$, $h = 1, \dots, u_\ell$, tem-se que a álgebra de Jordan comutativa para o modelo resultante do cruzamento é

$$\mathcal{A} = \bigotimes_{\ell=1}^L \left[\bigtimes_{h=1}^{u_\ell} \mathcal{A}_{\ell,h} \right]. \quad (5.3.1)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \underline{\dot{Q}}_{\ell,h} &= \left\{ \dot{Q}_{\ell,h,1}, \dots, \dot{Q}_{\ell,h,m_{\ell,h}}, \ell = 1, \dots, L, h = 1, \dots, u_\ell \right\} \\ &= \left\{ \dot{Q}_{\ell,h,k}, \ell = 1, \dots, L, h = 1, \dots, u_\ell, k = 1, \dots, m_{\ell,h} \right\} \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

as bases principais para as álgebras $\mathcal{A}_{\ell,h}$, as bases principais das álgebras \mathcal{A}_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, são

$$\underline{Q}_\ell = \left\{ \mathbf{Q}_{\ell,h,k} = D(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \dot{\mathbf{Q}}_{\ell,h,k}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), h = 1, \dots, u_\ell, k = 1, \dots, m_{\ell,h} \right\} \quad (5.3.3)$$

conforme figura 5.3.1.

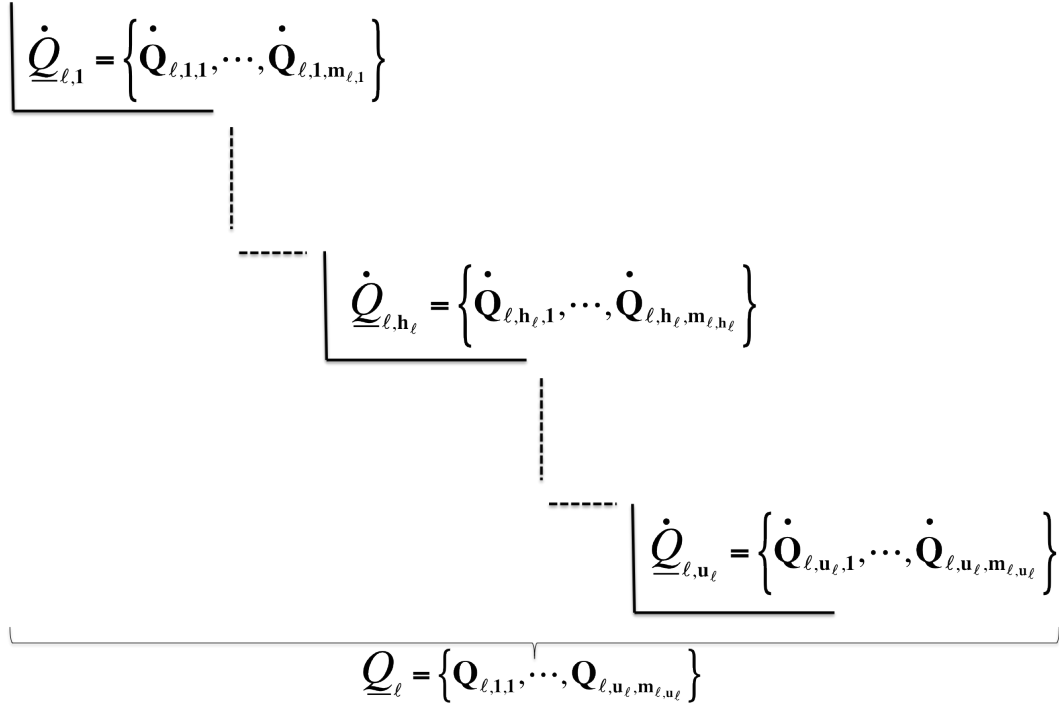


Figura 5.3.1: ℓ -ésimo modelo com aninhamento em escada estruturado - bases principais das álgebras de Jordan comutativas

As matrizes que constituem a base \underline{Q}_ℓ são matrizes diagonais por blocos, com todos os blocos principais nulos à exceção de um. Esse bloco não nulo é uma matriz de $\dot{\mathbf{Q}}_{\ell,h}$.

Face ao exposto vem que a base principal da álgebra \mathcal{A} é

$$\underline{Q} = \left\{ \bigotimes_{\ell=1}^L D(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \dot{\mathbf{Q}}_{\ell,h,k}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), h = 1, \dots, u_\ell, k = 1, \dots, m_{\ell,h} \right\}. \quad (5.3.4)$$

Tem-se ainda

$$\underline{Q}_{\ell}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \bigotimes_{\ell=1}^L \left[\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \dot{\mathbf{A}}_{\ell,h,k} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \right], h = 1, \dots, u_{\ell}, k = 1, \dots, m_{\ell,h} \right\}. \quad (5.3.5)$$

A figura 5.3.2 apresenta as várias bases principais, bem como as relações entre elas.

$$\begin{array}{c} \underline{\dot{Q}}_{1,1} = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_{1,1,1}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_{1,1,m_{1,1}} \right\} \otimes \cdots \otimes \underline{\dot{Q}}_{L,1} = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_{L,1,1}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_{L,1,m_{L,1}} \right\} \\ \vdots \quad \underline{\dot{Q}}_{1,h_1} = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_{1,h_1,1}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_{1,h_1,m_{1,h_1}} \right\} \otimes \cdots \otimes \underline{\dot{Q}}_{L,h_L} = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_{L,h_L,1}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_{L,h_L,m_{L,h_L}} \right\} \\ \vdots \quad \underline{\dot{Q}}_{1,u_1} = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_{1,u_1,1}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_{1,u_1,m_{1,u_1}} \right\} \otimes \cdots \otimes \underline{\dot{Q}}_{L,u_L} = \left\{ \dot{\mathbf{Q}}_{L,u_L,1}, \dots, \dot{\mathbf{Q}}_{L,u_L,m_{L,u_L}} \right\} \\ \hline \underline{Q}_1 = \left\{ \mathbf{Q}_{1,1,1}, \dots, \mathbf{Q}_{1,u_1,m_{1,u_1}} \right\} \otimes \cdots \otimes \underline{Q}_L = \left\{ \mathbf{Q}_{L,1,1}, \dots, \mathbf{Q}_{L,u_L,m_{L,u_L}} \right\} \\ \hline \underline{Q} = \left\{ \bigotimes_{\ell=1}^L \mathbf{Q}_{\ell,h_{\ell},k_{\ell,h_{\ell}}} : \mathbf{h}_{\ell} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{u}_{\ell}, \mathbf{k}_{\ell,h_{\ell}} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{m}_{\ell,u_{\ell}} \right\} \end{array}$$

Figura 5.3.2: Cruzamento de L modelos com aninhamento em esca-
cada estruturado - bases principais das álgebras de Jordan comutativas

Para calcular os estimadores para as componentes de variância canônicas, ver (5.2.16), usando o cruzamento das álgebras correspondentes aos vários degraus, é necessário redefinir o vector dos tratamentos dado em (5.2.18).

Sendo n_ℓ , $\ell = 1, 2$, o número de tratamentos do modelo ℓ , o vector das observações é dado por

$$\mathbf{y}_{n_1 n_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,n_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{2,n_2} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} y_{n_1,1} \\ \vdots \\ y_{n_1,n_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.3.6)$$

onde y_{ij} representa a observação em que se cruza o tratamento i do 1º modelo com tratamento j do 2º modelo, $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$.

Por outro lado, cruzando cada degrau do 1º modelo com cada degrau do 2º modelo, obtêm-se um subvector. Seja \mathbf{y}_{h_1, h_2} o subvector assim obtido, $h_\ell = 1, \dots, u_\ell$, $\ell = 1, 2$. O vector \mathbf{y}_{h_1, h_2} é constituído pelos tratamentos que resultam do cruzamento dos tratamentos dos degraus h_1 e h_2 . Assim, pode escrever-se

$$\mathbf{y}_{n_1 n_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,1} \\ \mathbf{y}_{1,2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{1,u_2} \\ \mathbf{y}_{2,1} \\ \mathbf{y}_{2,2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{2,u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{u_1,1} \\ \mathbf{y}_{1,2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{u_1,u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,n_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{2,n_2} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} y_{n_1,1} \\ \vdots \\ y_{n_1,n_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (5.3.7)$$

O vector \mathbf{y}_{h_1, h_2} representa o cruzamento do degrau h_1 do 1º modelo com o degrau h_2 do 2º modelo, $h_\ell = 1, \dots, u_\ell$, $\ell = 1, 2$.

Como, para

$$\ell = 1, 2, \quad h_\ell = 1, \dots, u_\ell, \quad k_{\ell, h_\ell} = 1, \dots, m_{\ell, h_\ell}, \quad (5.3.8)$$

cada matriz de \underline{Q}_ℓ é da forma

$$\mathbf{Q}_{\ell, h_\ell, k_{\ell, h_\ell}} = D(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \dot{\mathbf{Q}}_{\ell, h_\ell, k_{\ell, h_\ell}}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \quad (5.3.9)$$

e

$$\mathbf{A}_{\ell, h_\ell, k_{\ell, h_\ell}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{A}}_{\ell, h_\ell, k_{\ell, h_\ell}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.3.10)$$

então

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{A}_{1,h_1,k_1,h_1} \otimes \mathbf{A}_{2,h_2,k_2,h_2} \right) \mathbf{y} &= \mathbf{A}_{1,h_1,k_1,h_1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2,h_2,k_2,h_2} \mathbf{y}_1 \\ \dots \\ \mathbf{A}_{2,h_2,k_2,h_2} \mathbf{y}_{n_1} \end{bmatrix} \\
&= \left(\dot{\mathbf{A}}_{1,h_1,k_1,h_1} \otimes \dot{\mathbf{A}}_{2,h_2,k_2,h_2} \right) \mathbf{y}_{h_1,h_2}.
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

O cruzamento das álgebras dos degraus, na estimação das componentes de variância canônicas, é de grande importância no cruzamento de modelos com aninhamento em escada estruturado degrau a degrau. A possibilidade de cruzar os submodelos dos degraus, em vez dos modelos em escada globais, está em fase de estudo, fazendo parte dos trabalhos que iremos desenvolver no futuro.

Capítulo 6

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Os aninhamentos em escada permitem uma grande redução na dimensão das experiências, sendo o número de tratamentos dado pela soma dos níveis dos vários factores em cada degrau, com vantagens evidentes em termos materiais, técnicos e económicos. Têm ainda a vantagem de distribuir os graus de liberdade de forma mais equilibrada entre os vários factores. Havendo u factores com $a(1), \dots, a(u)$ níveis, vimos que os graus de liberdade para o h -ésimo factor são dados por $g(h) = a(h) - 1$, face aos $g(h) = (a(h) - 1) \prod_{j=0}^{h-1} a(j)$ do aninhamento equilibrado.

No nosso tratamento do aninhamento em escada, introduzimos uma abordagem degrau a degrau que facilita os cálculos. Esta perspectiva contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos aninhamentos, pois permitiu a introdução de um novo tipo aninhamento em escada.

Apresentámos a construção desse novo modelo em escada, que designámos por modelo com aninhamento em escada estruturado. A limitação de, no aninhamento em escada, só ser possível ter um factor por degrau foi ultrapassada com este novo modelo. Foram apresentadas duas estruturas algébricas para definir este modelo

de acordo com as abordagens utilizadas, abordagem global e abordagem degrau a degrau. Mostrámos que, apesar de diferentes, os estimadores obtidos para os parâmetros relevantes são iguais. Foi provado que estes estimadores são centrados e funções de estatísticas suficientes, não sendo no entanto resolvida a obtenção de estatísticas completas.

A construção dos modelos teve por base as operações binárias entre as bases principais das álgebras de Jordan comutativas a que os modelos iniciais estavam associadas. Estas operações permitem simplificar a análise dos modelos. Ficou assim comprovada, mais uma vez, a utilidade das álgebras de Jordan comutativas constituídas por matrizes simétricas.

Por outro lado o cruzamento de modelos permitiu considerar modelos mais complexos. Esta possibilidade levou-nos a estudar o cruzamento de aninhamentos em escada estruturados.

Os exemplos de aplicação apresentados, quer para o aninhamento em escada estruturado quer para o cruzamento destes modelos, permitiram mostrar que a técnica utilizada é “manejável” e computacionalmente vantajosa.

Relativamente a perspectivas de trabalho futuro, durante a realização desta tese, várias questões foram surgindo e alterando o rumo da investigação. Algumas soluções encontradas fizeram surgir novas perguntas e diversas dúvidas ficaram por esclarecer. As nossas ideias passam por:

- analisar o aninhamento em escada estruturado perante a existência de réplicas e existindo réplicas, estudar a possibilidade dos submodelos terem número de réplicas diferente,
- desenvolver a inferência, dos aninhamentos em escada estruturados, construindo regiões de confiança para os parâmetros e testando hipóteses sobre os mesmos,

- continuar o estudo do cruzamento de modelos com aninhamento em escada estruturado, mas com a abordagem degrau a degrau, como se apresentou na secção 5.3,
- verificar a existência de estatísticas completas nestes planos,
- considerar, em vez de aleatório, que o modelo a analisar é misto,
- analisar a eventualidade de os submodelos nos degraus não serem ortogonais.

Bibliografia

- [Carvalho et al., 2015] Carvalho, F., Mexia, J. T., Santos, C., and Nunes, C. (2015). Inference for types and structured families of commutative orthogonal block structures. *Metrika*, 78(3):337–372.
- [Cox and Solomon, 2003] Cox, D. and Solomon, P. (2003). *Components of Variance*. New York: Chapman and Hall.
- [Fernandes et al., 2011] Fernandes, C., Mexia, J., Ramos, P., and Carvalho, F. (2011). Models with Stair Nesting. *ICNAAM, AIP Conference Proceedings*, 1389:1627–1630.
- [Fernandes et al., 2012] Fernandes, C., Ramos, P., and Mexia, J. (2012). Crossing Balance and Stair Nested Design. *Electronic Journal of Linear Algebra. A publication of the International Linear Algebra Society*, 25:22–47.
- [Fernandes et al., 2014] Fernandes, C., Ramos, P., and Mexia, J. (2014). Algebraic Structure for the Crossing of Balanced and Stair Nested Designs. *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 34:71–88.
- [Fernandes et al., 2010] Fernandes, C., Ramos, P., and Mexia, J. T. (2010). Algebraic Structure of Step Nesting Designs. *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 30(2):221–235.

- [Fonseca et al., 2003] Fonseca, M., Mexia, J. T., and Zmyślony, R. (2003). Estimators and tests for variance components in cross nested orthogonal designs. *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 23(2):175–201.
- [Fonseca et al., 2006] Fonseca, M., Mexia, J. T., and Zmyślony, R. (2006). Binary operations on Jordan algebras and orthogonal normal models. *Linear Algebra and its Applications*, 417(1):75–86.
- [Fonseca et al., 2007] Fonseca, M., Mexia, J. T., and Zmyślony, R. (2007). Jordan algebras, generating pivot variables and orthogonal normal models. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 10(2):305–326.
- [Fonseca et al., 2008] Fonseca, M., Mexia, J. T., and Zmyślony, R. (2008). Inference in normal models with commutative orthogonal block structure. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 12:3–16.
- [Fraser, 1957] Fraser, D. (1957). *Nonparametric Methods in Statistics*. New York: John Wiley and Sons.
- [Jordan et al., 1934] Jordan, P., von Neumann, J., and Wigner, E. P. (1934). On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annals of Mathematical*, 35(1):29–64.
- [Lehmann, 1997] Lehmann, E. (1997). *Testing statistical hypotheses. Reprint of the 2nd ed. publ. by Wiley 1986*. New York, NY: Springer.
- [Lehmann and Casella, 1998] Lehmann, E. and Casella, G. (1998). *Theory of point estimation. 2nd ed.* Springer Texts in Statistics. New York, NY: Springer.
- [Mexia, 1995] Mexia, J. T. (1995). *Introdução a Inferência Estatística Linear*. Edições Lusofonas.

- [Mexia and Monteiro, 2014] Mexia, J. T. and Monteiro, S. (2014). Commutativity and Estimation. *Statistics and Mathematical Sciences Workshop. Universidade da Beira Interior, Covilhã*.
- [Mexia et al., 2010] Mexia, J. T., Vaquinhas, R., Fonseca, M., and Zmyslony, R. (2010). COBS: segregation, matching, crossing and nesting. *Latest Trends on Applied Mathematics, Simulation, Modeling, 4th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM'10)*, 249-255.
- [Monteiro and Mexia, 2013] Monteiro, S. and Mexia, J. T. (2013). Structured stair nesting-First approach. In *7th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation and 3rd Portuguese-Polish Workshop on Biometry, Covilhã, 2013*.
- [Monteiro et al., 2012] Monteiro, S., Salvador, D., and Mexia, J. T. (2012). Álgebras de Jordan comutativas e operações binárias. In *6th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation and 3rd Portuguese-Polish Workshop on Biometry, Covilhã, 2012*.
- [Monteiro et al., 2013] Monteiro, S., Salvador, D., and Mexia, J. T. (2013). Advances in Structured Stair Nesting. *ICNAAM, AIP Conference Proceedings*, 1558:851–854.
- [Nelder, 1954] Nelder, J. (1954). The interpretation of negative components of variance. *Biometrika*, 41:544–548.
- [Pollock, 1979] Pollock, D. S. G. (1979). *The Algebra of Econometrics*. New York: John Wiley and Sons.
- [Rao and Rao, 1998] Rao, C. and Rao, M. (1998). *Matrix algebra and its applications to statistics and econometrics*. Singapore:World Scientific Publishing.

- [Schott, 1997] Schott, J. R. (1997). *Matrix analysis for statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York, NY: Wiley. .
- [Seely, 1970a] Seely, J. (1970a). Linear Spaces and Unbiased Estimation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(5):1725–1734.
- [Seely, 1970b] Seely, J. (1970b). Linear Spaces and Unbiased Estimation. An application to the mixed linear model. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(5):1735–1748.
- [Seely, 1971] Seely, J. (1971). Quadratic Subspaces and Completeness. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(2):710–721.
- [Seely, 1977] Seely, J. (1977). Minimal sufficient statistics and completeness for multivariate normal families. *Sankhyā, The Indian Journal of Statistics, Series A*, 39(2):170–185.
- [Seely and Zyskind, 1971] Seely, J. and Zyskind, G. (1971). Linear spaces and minimum variance unbiased estimation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(2):691—703.
- [Silvey, 1975] Silvey, S. (1975). *Statistical inference. Reprinted with corrections*. Monographs on Applied Probability and Statistics. London: Chapman and Hall Ltd.
- [Steeb and Hardy, 2011] Steeb, W. H. and Hardy, Y. (2011). *Matrix calculus and Kronecker Product: a practical approach to linear and multilinear algebra. (Second Edition)*. World Scientific Publishing Company.
- [VanLeeuwen et al., 1999] VanLeeuwen, D. M., Birkes, D. S., and Seely, J. (1999). Balance and orthogonality in designs for mixed classification models. *The Annals of Statistics*, 27(6):1927–1947.

- [VanLeeuwen et al., 1998] VanLeeuwen, D. M., Seely, J. F., and Birkes, D. S. (1998). Sufficient conditions for orthogonal designs in mixed linear models. *Journal of statistical planning and inference*, 73(1):373–389.
- [Zmyślony and Drygas, 1992] Zmyślony, R. and Drygas, H. (1992). Jordan algebras and bayesian quadratic estimation of variance components. *Linear Algebra and its Applications*, 168:259–275.